

## < 「スターリングの公式」誕生秘話 >

今回は、ゼータから少し離れて「スターリングの公式」に関することを書いてみたい。岩沢宏和氏の名著「世界を変えた確率と統計のからくり 134 話」(岩沢宏和著、SB クリエイティブ)を読んでから、いつか紹介したいと思ってきたものである。

本には、スターリングの公式誕生にまつわる歴史的誤謬とも呼ぶべき話を書いてある。その話はほとんど知られていないと思われるが、私も岩沢氏の本で初めて知り驚いた。

じつは、この公式はド・モアブル(1667-1754)が最初に見出したものであり、“スターリングの公式”と呼ぶのはふさわしくない! という驚愕の事実が書かれている。

とにかく以下を読んでいただきたい。長くないので全部引用する。なお、“053” は 53 番目の話から来ている数値である。

「世界を変えた確率と統計のからくり 134 話」(岩沢宏和著) p. 114~p. 116 から引用

=====

### 053 スターリングの公式

ド・モアブルの話に戻ろう。ド・モアブルは、2項分布を近似しようとして正規分布の密度関数とまったく同じ式を導いたのであった。

2項分布の式には2項係数が登場し、その2項係数は、

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

というように階乗を使って表される。かたや、正規分布の式には階乗は出てこず、2項分布の式にはなかった  $e$  や  $\pi$  が出てくる。こういうことが起こるのは、実は、極限を考えると、階乗が  $e$  や  $\pi$  を使って表されるからである。

階乗と  $e$  と  $\pi$  との間のそのような関係を表すのがスターリングの公式とよばれるものであり、2項分布の近似として正規分布を導出するときの鍵となる。スターリングの公式は、

$$n! \sim \sqrt{(2\pi n)} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

が成り立つというものである。ここで「 $\sim$ 」という記号は、 $n$  が大きければ右辺で左辺が「近似」できることを意味するが、(両辺の差が小さいことを主張するものではなく) 両辺の比が1に近いことを意味する。より数学的にいえば、スターリングの公式は  $n \rightarrow \infty$  とするとき上式の両辺の比が1になるという事実を述べるものである。

スターリングの公式を見出したのは、ド・モアブルである。ド・モアブルはまず、ある定数  $B$  を使うと、

$$n! \sim B\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

となるという公式を独自に(スターリングよりも早く)見つけていた。

その際、

$$B = \log\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \dots\right)$$

であることも発見していた。その後、1729年にジェームズ・スターリング(1692-1770)から受けとった手紙を見て

$$B = \sqrt{2\pi}$$

であることに気づき、いまではスターリングの公式とよばれる公式を史上はじめて得たのであった。

この史実から、たとえばカール・ピアソンは、この公式を「スターリングの公式」とよぶのはふさわしくないという。スターリングがド・モアブルよりも先に発見したのは、上記の定数 $B$ の値でさえなく、単にそれが $\sqrt{2\pi}$ と同じ値だという事実だけだからである。しかし、上で記した階乗の近似式を含意する式を(上記の定数 $B$ が $\sqrt{2\pi}$ に一致するという言及はなしに)スターリングが刊行したのは、ド・モアブルが上の公式を含意する式を( $B$ が $\sqrt{2\pi}$ に一致するとの言及つきで、しかし、その功績はスターリングに帰して)発表したのと同年の1730年のことであるので、のちの人びとが上記公式を「スターリングの公式」とよぶのはやむをえないことかもしれない。

=====

これを読んで、どう思われたであろうか。

スターリングの公式の発見者はド・モアブルであり、スターリングではないことがはっきりとわかったのではなかろうか。

これまで、スターリングが発見したから「スターリングの公式」とよばれると思っていたが、それは完全に間違いとわかる。こんな歴史的な事実が隠れていたとは驚き以外のなにものでもない。

本当は、いまからでも「ド・モアブルの公式」という呼称に改めてほしいところであるが、当時から300年近くも経ってしまっているので、それはもう無理というものだろう。

それにしてもド・モアブルはフェアである。それに比べてスターリングは・・・

「世界を変えた確率と統計のからくり 134話」には、このような面白い話が満載されている。タイトル名の軽さ?とは裏腹に、確率・統計の深い歴史が述べられている。パスカル、フェルマーを経て、ド・モアブルが(現代に通ずる)確率の概念を打ち立て、それをラプラスほか多数が発展させてきた歴史的過程がいきいきと紹介されている。

なお、上記引用でも記されている通り、中心極限定理の特殊ケースを最初に発見したのはド・モアブルである。2項分布の近似として成し遂げた。中心極限定理の一般的な場合を証明したのはラプラスである。

岩沢氏のこの本は確率・統計の基礎知識があればより愉しめる本であるが、なくても数学史を存分に愉しむことができる構成になっている。何度読んでも飽きない書である。一読をお勧めしたい。

2020/4/11 杉岡幹生

(参考文献)

「世界を変えた確率と統計のからくり 134話」(岩沢宏和著、SBクリエイティブ)