＜ゼータ分割は正規拡大である － 例Ｌ(1)４分割 －＞　rev1.01

今回は、前回からの発展的な結果として「ゼータ分割は正規拡大である」ということを、Ｌ(1)４分割を例に示したい。
これは、以前から示唆してきた「ゼータ分割（分身たち）はガロア理論に関係する」ということを具体的に述べたものである。

まずこのシリーズにおける“ゼータ分割”のゼータとは、「ゼータ関数の明示的な特殊値」を指すことに注意されたい。すなわちζ(2)、ζ(4)とかＬ(1)、Ｌ(3)などを指している。

まず何を目標にしているか？を最初に簡明な表現で述べておきたい。それは方程式や体のことに関係するのだが、次のようなことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータの分身の（π^nを除いた）値(特殊値)は、ある一連の多項式から成る方程式の解として得られる。その値は、その方程式の係数に対して加減乗除および冪(べき)根を求める計算を有限回実行して得られる。つまり、方程式を代数的に解いて得られるものとなる。
さらにその解（分身の値）には、冪根は冪根でも平方根√しか出てこない。($\sqrt[3]{}$や$\sqrt[7]{}$とかは出ない！）
例えば、Ｌ(1)４分身の値が
$1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$,　$1-\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}$,　$1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}$,　$1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
となるように。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これが、ゼータ分割における目標の一つである（他にも、超幾何関数の方面とか行列方面など、別の山がいくつもそびえている)。しばらく上記の方程式方面を調べたい。

さて、Ｌ(1)の４分割を見ていく。Ｌ(1)とは、もちろん次のものである。
$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+1/17-1/19+\cdots=\pi/4$

Ｌ(1)４分割を示すと、次となる。（その１１）から（表現を少し変えて）抜粋。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Ｌ(1)４分割

$B1=1-1/15+1/17-1/31+1/33-1/47+\cdots=(\pi/16)\tan(7\pi/16)$

$B2=1/3-1/13+1/19-1/29+1/35-1/45+\cdots=(\pi/16)\tan(5\pi/16)$

$B3=1/5-1/11+1/21-1/27+1/37-1/43+\cdots=(\pi/16)\tan(3\pi/16)$

$B4=1/7-1/9+1/23-1/25+1/39-1/41+\cdots=(\pi/16)\tan(\pi/16)$

$B1-B2+B3-B4=\pi/4=L(1)$ である。B1, −B2, B3, −B4 がＬ(1)４分身である。右辺の tan()値は次の通り。

$\tan(7\pi/16)=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$、$\tan(5\pi/16)=-1+\sqrt{2}+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$
$\tan(3\pi/16)=1-\sqrt{2}+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$、$\tan(\pi/16)=-1-\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

“B1 -B2 +B3 -B4”の計算で√がきれいに消えて、B1 -B2 +B3 -B4＝π/4 となる様を味わっていただきたい。

前回の内容とも若干重なるが、分身の値を解にもつ方程式を考察しよう。

（その９７）でＬ(1)４分身 B1, -B2 , B3, -B4 の値を解にもつ４次方程式を示したが、次のものである。

$$x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0 \quad \text{------①}$$

この四つの解 x1, x2, x3, x4 は、次となる。

$x1=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$, $x2=1-\sqrt{2}-\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$, $x3=1-\sqrt{2}+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$, $x4=1+\sqrt{2}-\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

これらが、それぞれＬ(1)４分身 B1, -B2 , B3, -B4 の（πを除いた）値である。

さて上記の①は、解の一つ x1 の有理数体Ｑ上の最小多項式になっている（x2, x3, x4 を考えてもよいが）。
最小多項式とは次のものである。（「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）から引用。若干補足した）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜最小多項式とは＞

複素数θに対し、以下の条件を満たす有理数係数のｎ次多項式 p(x)が存在するとき、多項式 p(x)を、数θの有理数体Ｑ上の最小多項式という。

・p(x)はθを根に持つ。
・p(x)のｎ次の係数は１に等しい。
・θを根に持つ、ｎ次未満の有理数係数の多項式は存在しない。

またこのとき、体の拡大Ｑ(θ)/ＱをＱ上の線形空間（ベクトル空間）と考えると、
$\{1,\ \theta,\ \theta^2, \theta^3,\ \cdots,\ \theta^{n-1}\}$
は、基底となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

基底やベクトル空間に関しては、（その１４３）あたりを参照されたい。

Ｌ(1)４分身の方程式①は、上の最小多項式の条件を満たしている。
つまり「①の方程式の多項式 $p(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$ は、$x1=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ を根に持つ。その p(x)の 4 次の係数は 1 に等しい。x1 を根に持つ 4 次未満の有理数係数の多項式は存在しない。」となっている。最後の“x1 を根に・・”は手計算で簡単に確認できる。

次に、①の解の一つ x1＝1 +√2 +√(4+2√2)を、有理数体Ｑに添加した体Ｑ(x1)を考えよう。この体Ｑ(x1)の数は、“p + q(1 +√2 +√(4+2√2))“という数の集合に属する。ここで、p,q は有理数。
この体の拡大Ｑ(x1)/Ｑは、じつは正規拡大という特別な体の拡大になっている。ここで“体の拡大”とは、ある体ｋにその体に属さないある数αを加えて数の範囲(集合)を拡大した体ｋ(α)を作ることを言う。

正規拡大とは、次のものである。(「数学ガール／ガロア理論」(結城浩著、SB クリエイティブ) から引用。)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜正規拡大とは＞

一般に、体拡大Ｌ/K で、次の条件を満たすものを正規拡大と呼ぶ。

体Ｌに属している任意の数αに対して、「αのＫ上の最小多項式」は、Ｌ上で１次式の積に因数分解する。

ただし、ここでは拡大次数が有限の体拡大のみを考えている。
正規拡大の定義は、こんなふうに言い換えることもできる。

拡大体に、最小多項式の根が一つ属しているならば、他のすべての根も必ずその拡大体に属しているとしよう。そのような体の拡大を正規拡大と呼ぶ。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前の定義でも後ろの定義でもどちらでもよいが、これが正規拡大の定義である。

例えば、方程式①の多項式 p(x)＝x^4 −4x^3 −6x^2 +4x +1 に関して、後ろの定義の方を確認しよう。つまり p(x)の根の一つ x1＝1 +√2 +√(4+2√2)を考え、まず体Ｑ(x1)の基底を計算で求めた {1, x1, $x1^2$, $x1^3$}。計算の結果、本質的な四つの基底は {1, √2, √(4+2√2), √2√(4+2√2)} と求まった。

そして、①の四つの解 x1,x2,x3,x4
x1＝1 +√2 +√(4+2√2), x2＝1 −√2 −√(4−2√2), x3＝1 −√2 +√(4−2√2), x4＝1 +√2 −√(4+2√2)
全てが“p +q√2 +r√(4+2√2) +ω√2√(4+2√2)”という数の世界（Ｑ(x1)の世界、ベクトル空間）に属していることを以下の通り確認できた(p,q,r,ωは有理数)。

解 x2 では、x2＝1 −√2 −√(4−2√2)＝p+ q√2+ r√(4+2√2) +ω√2√(4+2√2)を満たす有理数 p,q,r,ωが存在する。その答えは、p=1,q=−1,r=1,ω=−1 となる。

他の解 x3、x4 も同様に簡単に求まる。
x3 の場合は p=1,q=−1,r=−1,ω=1 となる。
x4 の場合は p=1,q=1,r=−1,ω=0 となる。
x1 の場合は、当然ながら p=1,q=1,r=1,ω=0 となる。

まとめると、次のように基底で表現できる。あえて 0 も入れた。

$x1=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+0\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$
$x2=1-\sqrt{2}-\sqrt{(4-2\sqrt{2})}=1-\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$
$x3=1-\sqrt{2}+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}=1-\sqrt{2}-\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$
$x4=1+\sqrt{2}-\sqrt{(4+2\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}-\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+0\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

これより、体Ｑ(x1)に含まれる一つの数 $x1=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ に着目した場合、x1 を解に持つ最小多項式 $p(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$ の四根全部が体Ｑ(x1)に属することが分かった（基底で表現できたから）。

以上。

上記をヒントに、L(1)４分割での体の拡大Ｑ(x1)/Ｑが、正規拡大になっていることを証明したい。すなわち、体Ｑ(x1)における任意の数αの最小多項式を考えた場合、その全ての根が体Ｑ(x1)に含まれることを示せば証明が完了となる。

以下にそれを示す。

＝＝

＜L(1)４分割での体の拡大Ｑ(x1)/Ｑが正規拡大になっていることの証明＞

有理数体Ｑに $x1=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ という数 x1 を添加した体Ｑ(x1)を考える。この体の拡大Ｑ(x1)/Ｑが正規拡大になっていることを証明する。

まずL(1)４分身の値が x1, x2, x3, x4 であることを思い出しておきたい。
その値は、
$x1=1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$,　$x2=1-\sqrt{2}-\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$,　$x3=1-\sqrt{2}+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$,　$x4=1+\sqrt{2}-\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$
である。

さて、体Ｑ(x1)上の任意の数αは、$\alpha=p+q(1+\sqrt{2}+\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$　-----②
と表される。ここで、p, q は有理数である（有理数体Ｑに属する）。
②より、

$$\alpha-p-q(1+\sqrt{2})=q\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$$

両辺を２乗して、変形して次を得る。

$$(\alpha-p)^2-2(\alpha-p)q-q^2=2(\alpha-p)q\sqrt{2}$$

両辺を q^2 で割ると、

$$((\alpha-p)/q)^2-2(\alpha-p)/q-1=2((\alpha-p)/q)\sqrt{2}$$

ここで、$(\alpha-p)/q=A$ とおくと、次となる。

$$A^2-2A-1=2\sqrt{2}\cdot A \quad\text{-------③}$$

③の両辺を２乗する。

$(A^2 -2A -1)^2 = (2\sqrt{2} \cdot A)^2$ ------④

変形していこう。

$(A^2 -2A -1)^2 - (2A\sqrt{2})^2 = 0$

$\{(A^2 -2A -1) -2\sqrt{2} \cdot A\}\{(A^2 -2A -1) +2\sqrt{2} \cdot A\} = 0$

$\{A^2 -2(1+\sqrt{2})A -1\}\{A^2 -2(1-\sqrt{2})A -1\} = 0$

よって、$A = 1 +\sqrt{2} \pm \sqrt{(4+2\sqrt{2})}$、$1 -\sqrt{2} \pm \sqrt{(4-2\sqrt{2})}$ ----⑤
と四解が求まった。

$(\alpha -p)/q = A$ であるから、⑤より A を消して、α＝・・で表すと、次となる。

$\alpha = p +q(1 +\sqrt{2} \pm \sqrt{(4+2\sqrt{2})})$、$p +q(1 -\sqrt{2} \pm \sqrt{(4-2\sqrt{2})})$ ----⑥

さて④はじつは次のようにも変形できる。

$A^4 -4A^3 -6A^2 +4A +1 = 0$ -----⑦

$(\alpha -p)/q = A$ だから、⑦より次の α の４次方程式を得る。(⑧の形のままでおく)

$((\alpha -p)/q)^4 -4((\alpha -p)/q)^3 -6((\alpha -p)/q)^2 +4((\alpha -p)/q) +1 = 0$ -----⑧

式変形の構造から、この⑧が左辺が α の最小多項式になっていることは容易にわかる。
⑧の４次方程式の四解が⑥となる。その四解を $\alpha1$、$\alpha2$、$\alpha3$、$\alpha4$ とすると、それぞれ次のようになる。

$\alpha1 = p +q(1 +\sqrt{2} +\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$ ----⑨-1

$\alpha2 = p +q(1 +\sqrt{2} -\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$ ----⑨-2

$\alpha3 = p +q(1 -\sqrt{2} +\sqrt{(4-2\sqrt{2})})$ ----⑨-3

$\alpha4 = p +q(1 -\sqrt{2} -\sqrt{(4-2\sqrt{2})})$ ----⑨-4

$\alpha = \alpha1$ であることに注意。これらの数(解)は、すべて体Ｑ(x1)つまり体Ｑ$(1 +\sqrt{2} +\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$に含まれる数となる。それは、この証明の前に上方の一例で示した、<u>四つの基底 </u>$\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{(4+2\sqrt{2})},\ \sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}\}$ を使った次の関係から分かる。

****

$x1 = 1 +\sqrt{2} +\sqrt{(4+2\sqrt{2})} = 1 +\sqrt{2} +\sqrt{(4+2\sqrt{2})} +0\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$x2 = 1 -\sqrt{2} -\sqrt{(4-2\sqrt{2})} = 1 -\sqrt{2} +\sqrt{(4+2\sqrt{2})} -\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$x3 = 1 -\sqrt{2} +\sqrt{(4-2\sqrt{2})} = 1 -\sqrt{2} -\sqrt{(4+2\sqrt{2})} +\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$x4 = 1 +\sqrt{2} -\sqrt{(4+2\sqrt{2})} = 1 +\sqrt{2} -\sqrt{(4+2\sqrt{2})} +0\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

****

つまり　この x2 または x3 から、

$\sqrt{(4-2\sqrt{2})} = -\sqrt{(4+2\sqrt{2})} +\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ ----⑩

と分かる。⑩を使うと、⑨-1～⑨-4 は、次のように四つの基底 $\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{(4+2\sqrt{2})},\ \sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}\}$ で表現できる。あえて 0 を入れて表現した。

$$\alpha 1 = p + q(1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + 0\times\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$
$$\alpha 2 = p + q(1 + \sqrt{2} - \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + 0\times\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$
$$\alpha 3 = p + q(1 - \sqrt{2} - \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$
$$\alpha 4 = p + q(1 - \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})} - \sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$

　変形して次を得る。

$$\alpha 1 = p + q + q\sqrt{2} + q\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + 0\times\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$
$$\alpha 2 = p + q + q\sqrt{2} - q\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + 0\times\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$
$$\alpha 3 = p + q - q\sqrt{2} - q\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + q\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$
$$\alpha 4 = p + q - q\sqrt{2} + q\sqrt{(4+2\sqrt{2})} - q\sqrt{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})})$$

体Ｑ(x1)の四つの基底で $\alpha 1$～$\alpha 4$ が表現できた。

　これは $\alpha 1$～$\alpha 4$ がすべて体Ｑ(x1)に属する数であることを示している。すなわち、体Ｑ(x1)の任意の数 α を根にもつ（４次の）最小多項式の四根全部が体Ｑ(x1)に属する数になることが分かった。

以上より、体の拡大Ｑ(x1)／Ｑは、正規拡大になっていることが証明された。

（証明終わり）

＝＝

　このようにＬ(1)４分割に関係する体の拡大Ｑ(x1)／Ｑは、正規拡大になっていることが分かった。

　ところで、⑦を再び見よう。

$$A^4 - 4A^3 - 6A^2 + 4A + 1 = 0 \quad \text{-----⑦}$$

　これは、なんと

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{------①}$$

　これと同じ形である！

⑦は、$(\alpha - p)/q = A$ から出てきたものである。体Ｑ(x1)の任意の数 α は $\alpha = p + q(1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})})$ であるから、$(\alpha - p)/q = A = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ であり、当然といえば当然である。
ただしこれで特殊ケースの最小多項式から、任意ケースの最小多項式を“機械的に”求める方法が分かった。これは他のゼータ、例えば $\zeta(2)$ などにも応用できそうである。

　ゼータ分割は、方程式論でいえば今回見たように正規拡大というものに飲み込まれていく。正規拡大とともに、おそらく分離拡大にもなっており、ゼータ分割は最終的にガロア拡大になっているはずである。ここはさらに調べていきたい。

さらに（その１４９），（その１５０），（その１５１）の考察も合わせると、「ゼータ分身の値は、方程式を代数的に解くことによって得られ、且つ、（π^nを除いた）その値は、有理数に加減乗除と平方根√を開くという操作を繰り返し行って得られる実数になる」とわかる。

一般的な証明はできないが、これまでの膨大な計算から、ゼータのn分割でそうなっていることは確実である。

つまり、ゼータ分身の値(特殊値)は、ギリシャ三大作図問題にも関係する作図可能数になる！
（作図可能数：有理数に加減乗除と平方根を開くという操作を繰り返し行って得られる実数）

ゼータの明示的な特殊値は、究極の対称性の上に成り立っているから、このようになる。

2020/3/28　杉岡幹生
2020/4/4　rev1.01 改訂

（参考文献）
「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）
「数学入門辞典」（青本・上野・加藤 他著、岩波書店）

rev1.01　2020/4/4　初版は、L(1)４分割での正規拡大の示し方が不完全であったので、正しい証明を与えた。