

2年前に $\zeta(2)$ や $L(1)$ が任意に(無数に)分割できることを見出した。その事実は私には驚くべきことであったが、この2年間はその裏に隠れた構造を明らかにすることに邁進してきた。

発見時その現象にはびっくりしたが、計算自体は高校生でもできる簡単な計算であり、よって精密な証明は示さなかった。今回はその証明を示したい。

なお、 $2n$ 分割可能の $2n$ の意味だが、「 $(2n+1)$ 分割(奇数分割)しても、結局それは $2n$ 分割(偶数分割)になってしまう」ことを意味している。

証明の前に、ゼータ分割を発見した経緯・背景をすこし振り返っておきたい。

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page203.htm

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page209.htm

上記ページ周辺で、ゼータの香りの漂う公式という非常に魅惑的な公式をフーリエ級数から多数導いた。2010年あたりのことである。

その式の神秘的な姿から「これはゼータ関数以上に深いものを秘めた式だ」と確信していた。後年その式は「数論I」(加藤、黒川、斎藤 著、岩波書店) p. 93にも出ていることがわかった。(導出方法は私の方法とは異なっている。本では、さらりと紹介されているだけで、重要視されていない感じである)

2年前にその式に複素数を試しにふと代入してみた。そうしたらゼータの分身たちが雨あられと現れるという驚くべき現象を見出した。それがこの研究のはじまりである。

研究途上でゼータの香り公式は(オイラーの?)部分分数展開式と本質的に同値とわかり、それ以来、より簡単な(複素数を用いる必要がない)部分分数展開式を用いて調べている。

ゼータ分割は一大鉱脈を成しており、いくら掘っても枯れない豊かなものをもっている。この領域(鉱山 or 地底洞窟)には美しい対称性の泉が存在していて、その泉から豊かなものがこんこんと湧き出てきている。そしてそこでは数学のいろいろな領域がつながっていて、そのつながりを示すと次のようになる。

フーリエ級数 \Rightarrow ゼータの香りの漂う公式 \Rightarrow 部分分数展開式 $\Rightarrow L(\chi, s)$ ゼータの分割
 \Rightarrow 実[双]行列(エルミート行列) \Rightarrow 固有方程式 \Rightarrow 直交多項式 \Rightarrow 超幾何微分方程式 \Rightarrow 超幾何関数

これが、この研究の流れである。まだまだいくらでも新しいことが出てくると思う。この領域は巨大な鉱山あるいは豊かな漁場という感じである。

証明の前に、過去に発表したものからいくつか分割の例を示しておく。これでゼータ分割(ゼータが分身に分かれる)のイメージをまずつかんでほしい。

=====

<L(1)の例>

$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - \dots$ は以下のように分身(パーツ)に分割される。

■L(1) 2分割

$$A1 = 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + \dots = (\pi/8) \tan(3\pi/8)$$

$$A2 = 1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + 1/19 - 1/21 + \dots = (\pi/8) \tan(\pi/8)$$

$A1, -A2$ が2分身であり、 $A1 - A2 = \pi/4 = L(1)$ である。

$\tan()$ の値は右の通り。 $\tan(3\pi/8) = 1 + \sqrt{2}$ 、 $\tan(\pi/8) = -1 + \sqrt{2}$

■L(1) 3分割

$$B1 = 1 - 1/11 + 1/13 - 1/23 + 1/25 - 1/35 + \dots = (\pi/12) \tan(5\pi/12)$$

$$B2 = 1/3 - 1/9 + 1/15 - 1/21 + 1/27 - 1/33 + \dots = (\pi/12) \tan(3\pi/12)$$

$$B3 = 1/5 - 1/7 + 1/17 - 1/19 + 1/29 - 1/31 + \dots = (\pi/12) \tan(\pi/12)$$

$B1, -B2, B3$ が3分身であり、 $B1 - B2 + B3 = \pi/4 = L(1)$ である。

$\tan()$ の値は右の通り。 $\tan(5\pi/12) = 2 + \sqrt{3}$ 、 $\tan(3\pi/12) = 1$ 、 $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$

■L(1) 4分割

$$C1 = 1 - 1/15 + 1/17 - 1/31 + 1/33 - 1/47 + \dots = (\pi/16) \tan(7\pi/16)$$

$$C2 = 1/3 - 1/13 + 1/19 - 1/29 + 1/35 - 1/45 + \dots = (\pi/16) \tan(5\pi/16)$$

$$C3 = 1/5 - 1/11 + 1/21 - 1/27 + 1/37 - 1/43 + \dots = (\pi/16) \tan(3\pi/16)$$

$$C4 = 1/7 - 1/9 + 1/23 - 1/25 + 1/39 - 1/41 + \dots = (\pi/16) \tan(\pi/16)$$

$C1, -C2, C3, -C4$ が4分身であり、 $C1 - C2 + C3 - C4 = \pi/4 = L(1)$ である。

$\tan()$ の値は、以下の通り。

$$\tan(7\pi/16) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{4+2\sqrt{2}}、\tan(5\pi/16) = -1 + \sqrt{2} + \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\tan(3\pi/16) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{4-2\sqrt{2}}、\tan(\pi/16) = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

<ζ(2)の例>

$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \dots$ は以下のように分身(パーツ)に分割される。

下記の $Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots = \pi^2/8$ は、 $\zeta(2)$ と次の関係にあり、両者は本質的に等しい。“Z(s)” は私が独自に使っている記号である。

$$Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots$$

$$= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \dots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \dots) = \zeta(2) - (1/2^2) \zeta(2)$$

$$= (3/4) \zeta(2) = \pi^2/8$$

$\zeta(2)$ (つまり $Z(2)$) も $L(1)$ とまったく同様に分割できるが、4分割のみを示す。

■Z(2) 4 分割

$$C1 = 1 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/31^2 + 1/33^2 + 1/4^2 + \dots = (\pi/16)^2 / \{\cos(7\pi/16)\}^2$$

$$C2 = 1/3^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/35^2 + 1/45^2 + \dots = (\pi/16)^2 / \{\cos(5\pi/16)\}^2$$

$$C3 = 1/5^2 + 1/11^2 + 1/21^2 + 1/27^2 + 1/37^2 + 1/43^2 + \dots = (\pi/16)^2 / \{\cos(3\pi/16)\}^2$$

$$C4 = 1/7^2 + 1/9^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/39^2 + 1/41^2 + \dots = (\pi/16)^2 / \{\cos(\pi/16)\}^2$$

C1, C2, C3, C4 が Z(2) 4 分身であり、 $C1 + C2 + C3 + C4 = Z(2) = \pi^2/8$ である。

$1/\{\cos()\}^2$ の値は、以下の通り。

$$(16/\pi)^2 C1 = 1/\{\cos(7\pi/16)\}^2 = 8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$(16/\pi)^2 C2 = 1/\{\cos(5\pi/16)\}^2 = 8 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} - 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$(16/\pi)^2 C3 = 1/\{\cos(3\pi/16)\}^2 = 8 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2-\sqrt{2}} + 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$(16/\pi)^2 C4 = 1/\{\cos(\pi/16)\}^2 = 8 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2+\sqrt{2}} - 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

=====

これでイメージはつかめたと思う。

では、いよいよ証明を行うことにしよう。L(1) の分割のみ示すが、 $\zeta(2)$ でも全く同じである。

=====

<L(1) が 2n 分割可能であることの証明>

L(1) = $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots$ が 2n 分割可能であることを証明する。2 分割、3 分割、4 分割の場合を示し、その規則性から任意の自然数 n に対し、2n 分割可能であることを示す。(3 分割は結局、2 分割に還元される)

次のタンジェントの部分分数展開式を利用する。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x)) \tan(\pi x/2) \quad \text{-----①}$$

各分割において、次の[ゼータ分割の条件]を満たすことを調べていく。それは(その65)で述べたものだが、言い回しなどを修正し、再掲する。

[ゼータ分割の条件]

次の三つが、ゼータの分割の条件である。

- [1] 各パーツ(各分身)の値が求まること。
- [2] 全てのパーツを足し算することで、元ゼータまたは元ゼータの有理数倍を構成できること。
- [3] 各パーツが、元ゼータの有理数倍または別のパーツの有理数倍で構成されないこと。

これら[1]、[2]、[3]を満たす場合に、ゼータは分割可能と言える。

補足：[3]を例で補足したい。[3]は、偽の分割(真の分割でないもの)を除く意味がある。

$1/1^2+1/3^2+1/5^2+\dots$ と $1/2^2+1/4^2+1/6^2+\dots$ は、と(2)の分割ではないことに注意しよう。 $1/1^2+1/3^2+1/5^2+\dots = (1-1/2^2)$ と $(2) = (3/4)$ と (2) であり、 $1/2^2+1/4^2+1/6^2+\dots = (1/2^2)$ と $(2) = (1/4)$ と (2) であって、これらは本質的にと(2)そのものであって、分身(パーツ)ではない。こういうのを除く意味で[3]がある。

それでは証明していく。2分割、3分割、4分割のケースを証明し、最後に一般化する。

< 2分割のケース >

2分割の場合は、①の x に 3/4, 1/4 を代入する。すると、次の級数 A1, A2 が得られる。

[①左辺の x に 3/4 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2-(3/4)^2) + 1/(3^2-(3/4)^2) + 1/(5^2-(3/4)^2) + \dots \\ &= 1/((1-3/4)(1+3/4)) + 1/((3-3/4)(3+3/4)) + 1/((5-3/4)(5+3/4)) + \dots \\ &= (4^2/6) \{ 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + \dots \} \text{ -----②-1} \end{aligned}$$

[①左辺の x に 1/4 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2-(1/4)^2) + 1/(3^2-(1/4)^2) + 1/(5^2-(1/4)^2) + \dots \\ &= 1/((1-1/4)(1+1/4)) + 1/((3-1/4)(3+1/4)) + 1/((5-1/4)(5+1/4)) + \dots \\ &= (4^2/2) \{ 1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + 1/19 - 1/21 + \dots \} \text{ -----②-2} \end{aligned}$$

[①右辺の x に 3/4 代入] 右辺 = $(\pi/3) \tan(3\pi/8)$ -----③-1

[①右辺の x に 1/4 代入] 右辺 = $\pi \tan(\pi/8)$ -----③-2

②-1 と ③-1 より級数 A1 が、②-2 と ③-2 より級数 A2 が得られる。A1, A2 を並べよう。

$$A1 = 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + \dots = (\pi/8) \tan(3\pi/8)$$

$$A2 = 1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + 1/19 - 1/21 + \dots = (\pi/8) \tan(\pi/8)$$

[まず L(1) 級数の分割に関して]

A1 と A2 の級数で、L(1) の級数の分割がなされていることを示す。

A1, A2 級数の各項に関し、符号を無視してそれらを眺めると、L(1) の各項が全て現れている。(ここまではOKである)

次に、各項の符号を考えよう。

1 1/3 1/5 1/7 1/9 1/11 1/13 1/15 1/17 1/19 1/21 ... の各項の+、-の符号を考えよう。

下記で、黒字が A1 に対応し、赤字が A2 に対応する。

符号だけのブロック(4項単位)で上記 A1, A2 式をながめると、(1 1/3 1/5 1/7) で1ブロック (+ + - -)、(1/9 1/11 1/13 1/15) で1ブロック (+ + - -)、(1/17 1/19 1/21 1/23) で1ブロック (+ + - -) ... を形成していることがわかる。単純な繰り返し構造である。

仮に **A1+A2** として1式を構成してみると、(+ + - -) (+ + - -) (+ + - -) ... となる。

これは、[①左辺の x に 3/4 代入]、[①左辺の x に 1/4 代入] の計算の構造から、1ブロック内の左半分はすべて+になり、右半分は全て-になることからわかる。

$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19 + 1/21 - \dots$ であり、各項で+と-が交互に変わっている（交代級数）。上方での符号表記で表すと $L(1)$ は $(+ - + -) (+ - + -) (+ - + -) \dots$ となっている。

さて、 $A1$ と $A2$ から、この $L(1)$ の符号を構成することができるだろうか？ それは簡単にできて、 $A1-A2$ とすれば $(+ - + -) (+ - + -) (+ - + -) \dots$ とできる。

このように、 $1/4$ 代入で得られる $A2$ 級数に -1 を掛けるだけで $L(1)$ のパーツ ($-A2$) になるといううまい計算構造に部分分数展開式はなっているのである。 $A1$ はもちろんそのままパーツ(分身)となる。OK.

まとめると、 $A1, -A2$ が分身である。

以上より、 $L(1)$ 級数は2分割できることがわかった。

次に、右辺である。

[次に $\tan()$ の値に関して]

$A1, A2$ の右辺の $\tan()$ が無理数となる（有理数にならない）ことを示す。 $A1, A2$ を並べよう。

$$A1 = 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + \dots = (\pi/8) \tan(3\pi/8)$$

$$A2 = 1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + 1/19 - 1/21 + \dots = (\pi/8) \tan(\pi/8)$$

$L(1)$ は、 $L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots = \pi/4$ である。

さて、もし $\tan(3\pi/8)$ と $\tan(\pi/8)$ が有理数となったら、 $A1$ と $A2$ は親 $L(1)$ の有理数倍の値となって、これは [ゼータ分割の条件] の [3] に反する。

実際にはそれらは無理数になり、そうはならない。 $\tan(3\pi/8)$ と $\tan(\pi/8)$ の値を求めておく。

$$\text{まず、} \cos^2(3\pi/8) + \sin^2(3\pi/8) = 1 \quad \text{-----④-1}$$

2倍角の公式より、次も成り立つ。

$$\cos(2 \cdot 3\pi/8) = \cos^2(3\pi/8) - \sin^2(3\pi/8)$$

$$\text{これから、} -1/\sqrt{2} = \cos^2(3\pi/8) - \sin^2(3\pi/8) \quad \text{-----④-2}$$

$$\text{④-1 と ④-2 から、} \sin(3\pi/8) = \sqrt{((\sqrt{2}+1)/2\sqrt{2})}, \quad \cos(3\pi/8) = \sqrt{((\sqrt{2}-1)/2\sqrt{2})}$$

よって $\tan(3\pi/8)$ は、 $\tan(3\pi/8) = 1 + \sqrt{2}$ となる。同様に $\tan(\pi/8)$ も求まり、 $\tan(\pi/8) = -1 + \sqrt{2}$ となる。

$$\text{まとめると、} \tan(3\pi/8) = 1 + \sqrt{2}, \quad \tan(\pi/8) = -1 + \sqrt{2}$$

このように $\tan()$ の値は無理数となり、 $A1$ も $A2$ も親 $L(1)$ の有理数倍にはなり得ないことがわかった。

さらに、 $\tan(3\pi/8)$ と $\tan(\pi/8)$ が互いに有理数倍となっていないことは明らかである。 K を有理数として $\tan(3\pi/8) = K \cdot \tan(\pi/8)$ とはできないからである（背理法で簡単に証明できる。 K を有理数と仮定すると、矛盾が出る）。

以上より、[ゼータ分割の条件] を [1], [2], [3] を全て満たすから、 $L(1)$ は2分割可能とわかった。

< 3分割のケース >

3分割の場合は、①の x に $5/6, 3/6, 1/6$ を代入する。すると、次の級数 $B1, B2, B3$ が得られる。

3分割だが、結局は2分割になってしまう様子を見ていただきたい。

[①左辺の x に 5/6 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (5/6)^2) + 1/(3^2 - (5/6)^2) + 1/(5^2 - (5/6)^2) + \dots \\ &= 1/((1-5/6)(1+5/6)) + 1/((3-5/6)(3+5/6)) + 1/((5-5/6)(5+5/6)) + \dots \\ &= (6^2/10) \{1 - 1/11 + 1/13 - 1/23 + 1/25 - 1/35 + \dots\} \text{ -----⑤-1} \end{aligned}$$

[①左辺の x に 3/6 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (3/6)^2) + 1/(3^2 - (3/6)^2) + 1/(5^2 - (3/6)^2) + \dots \\ &= 1/((1-3/6)(1+3/6)) + 1/((3-3/6)(3+3/6)) + 1/((5-3/6)(5+3/6)) + \dots \\ &= (6^2/6) \{1/3 - 1/9 + 1/15 - 1/21 + 1/27 - 1/33 + \dots\} \text{ -----⑤-2} \end{aligned}$$

[①左辺の x に 1/6 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (1/6)^2) + 1/(3^2 - (1/6)^2) + 1/(5^2 - (1/6)^2) + \dots \\ &= 1/((1-1/6)(1+1/6)) + 1/((3-1/6)(3+1/6)) + 1/((5-1/6)(5+1/6)) + \dots \\ &= (6^2/2) \{1/5 - 1/7 + 1/17 - 1/19 + 1/29 - 1/31 + \dots\} \text{ -----⑤-3} \end{aligned}$$

[①右辺の x に 5/6 代入] 右辺 = $(6\pi / (4 \cdot 5)) \tan(5\pi/12)$ -----⑥-1

[①右辺の x に 3/6 代入] 右辺 = $(6\pi / (4 \cdot 3)) \tan(3\pi/12)$ -----⑥-2

[①右辺の x に 1/6 代入] 右辺 = $(6\pi / (4 \cdot 1)) \tan(\pi/12)$ -----⑥-3

⑤-1 と ⑥-1 から級数 B1 が、⑤-2 と ⑥-2 から級数 B2 が、⑤-3 と ⑥-3 から級数 B3 が得られる。B1, B2, B3 を並べよう。

$$B1 = 1 - 1/11 + 1/13 - 1/23 + 1/25 - 1/35 + \dots = (\pi/12) \tan(5\pi/12)$$

$$B2 = 1/3 - 1/9 + 1/15 - 1/21 + 1/27 - 1/33 + \dots = (\pi/12) \tan(3\pi/12)$$

$$B3 = 1/5 - 1/7 + 1/17 - 1/19 + 1/29 - 1/31 + \dots = (\pi/12) \tan(\pi/12)$$

[まず L(1) 級数の分割に関して]

B1, B2, B3 の級数で、L(1) の級数の分割がなされていることを示す。

B1, B2, B3 級数の各項に関し、符号を無視してそれらを眺めると、L(1) の各項が全て現れている。(ここまで OK である)

次に、各項の符号を考える。

1 1/3 1/5 1/7 1/9 1/11 1/13 1/15 1/17 1/19 1/21 1/23 1/25 1/27 1/29 1/31 1/33 1/35 ... の各項の +、- の符号を考えよう。下記で、黒字が B1 に、赤字が B2 に、青字が B3 に対応する。

符号だけのブロック (6 項単位) で上記 B1, B2, B3 式をながめると、(1 1/3 1/5 1/7 1/9 1/11) で 1 ブロック (+ + + - - -)、(1/13 1/15 1/17 1/19 1/21 1/23) で 1 ブロック (+ + + - - -)、(1/25 1/27 1/29 1/31 1/33 1/35) で 1 ブロック (+ + + - - -) ... を形成していることがわかる。

仮に B1+B2+B3 として 1 式を構成してみると、(+ + + - - -) (+ + + - - -) (+ + + - - -) ... となる。これは [①左辺の x に 5/6 代入] 他 の計算の構造から、1 ブロック内の左半分はすべて + になり、右半分は全て - になることからわかる。

L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19 + 1/21 - ... であり (交代級数)、符号表記で表すと、L(1) は (+ - + - + -) (+ - + - + -) (+ - + - + -) ... となっている。

さて、 B_1, B_2, B_3 から、この $L(1)$ の符号を構成することができるだろうか？ それは簡単にできて、 $B_1 - B_2 + B_3$ とすれば $(+ - + - + -) (+ - + - + -) (+ - + - + -) \dots$ とできる。

このように、 $3/6$ 代入で得られる級数 B_2 に -1 を掛けるだけで $L(1)$ のパーツ ($-B_2$) になるといううまい計算構造に部分分数展開式はなっているのである。 B_1, B_3 はもちろんそのままパーツ(分身)となる。OK.

まとめると、 $B_1, -B_2, B_3$ が分身である。

以上より、 $L(1)$ 級数は3分割できることがわかる。(次で、本質的には2分割になるのだが・・・)

次に、右辺である。

[次に右辺の $\tan()$ の値に関して]

B_1, B_2, B_3 の右辺の $\tan()$ が有理数か無理数かを調べる。結論を先に述べると、 B_2 が有理数、 B_1, B_3 は無理数となる。

B_1, B_2, B_3 を並べよう。

$$B_1 = 1 - 1/11 + 1/13 - 1/23 + 1/25 - 1/35 + \dots = (\pi/12) \tan(5\pi/12)$$

$$B_2 = 1/3 - 1/9 + 1/15 - 1/21 + 1/27 - 1/33 + \dots = (\pi/12) \tan(3\pi/12)$$

$$B_3 = 1/5 - 1/7 + 1/17 - 1/19 + 1/29 - 1/31 + \dots = (\pi/12) \tan(\pi/12)$$

まず B_2 の $\tan(3\pi/12)$ は $\tan(\pi/4)$ だからこれは1であり、有理数である。

じつは左辺でも $B_2 = 1/3 - 1/9 + 1/15 - 1/21 + 1/27 - 1/33 + \dots = 1/3(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots) = 1/3L(1)$ となり、結局 B_2 は $L(1)$ そのものである。 よって B_2 は分身(パーツ)ではないことがわかった。

B_1 と B_3 の $\tan(5\pi/12)$ と $\tan(\pi/12)$ は、<2分割のケース>と同様に計算できて、

$$\tan(5\pi/12) = 2 + \sqrt{3}, \tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$$

と簡単に求まる。

このように B_1, B_2, B_3 右辺 $\tan()$ の値は B_1 と B_3 が無理数となり、 B_2 が有理数となる。このことから B_1, B_3 は親 $L(1)$ の有理数倍にはなり得ないことがわかる。

さらに、 $\tan(5\pi/12)$ と $\tan(\pi/12)$ が互いに有理数倍とはならない。その理由は、 K を有理数として $\tan(5\pi/12) = K \cdot \tan(\pi/12)$ とはできないからである(背理法で簡単に証明できる)。

よって、 B_1, B_2, B_3 の内、真の分身は B_1 と B_3 のみとわかった

したがって、3分割では次のようになる。

$$B_1 - B_2 + B_3 = L(1) \text{ であるが、} B_2 = 1/3L(1) \text{ であるから、} B_1 + B_3 = L(1) + 1/3L(1) = (4/3)L(1)$$

となり、結局、2分割となるのである。一つ上で見た2分割とは別種の2分割と言える。

以上から 3分割は結局は2分割になるとわかった。その上で[ゼータ分割の条件]を全て満たしている。

<4分割のケース>

4分割の場合は①の x に $7/8, 5/8, 3/8, 1/8$ を代入する。すると、それぞれ級数 C_1, C_2, C_3, C_4 が得られる。

[①左辺の x に $7/8$ 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (7/8)^2) + 1/(3^2 - (7/8)^2) + 1/(5^2 - (7/8)^2) + \dots \\ &= 1/((1-7/8)(1+7/8)) + 1/((3-7/8)(3+7/8)) + 1/((5-7/8)(5+7/8)) + \dots \\ &= (8^2/14) \{1 - 1/15 + 1/17 - 1/31 + 1/33 - 1/47 + \dots\} \text{ -----⑦-1} \end{aligned}$$

[①左辺の x に 5/8 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (5/8)^2) + 1/(3^2 - (5/8)^2) + 1/(5^2 - (5/8)^2) + \dots \\ &= 1/((1-5/8)(1+5/8)) + 1/((3-5/8)(3+5/8)) + 1/((5-5/8)(5+5/8)) + \dots \\ &= (8^2/10) \{1/3 - 1/13 + 1/19 - 1/29 + 1/35 - 1/45 + \dots\} \text{ -----⑦-2} \end{aligned}$$

[①左辺の x に 3/8 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (3/8)^2) + 1/(3^2 - (3/8)^2) + 1/(5^2 - (3/8)^2) + \dots \\ &= 1/((1-3/8)(1+3/8)) + 1/((3-3/8)(3+3/8)) + 1/((5-3/8)(5+3/8)) + \dots \\ &= (8^2/6) \{1/5 - 1/11 + 1/21 - 1/27 + 1/37 - 1/43 + \dots\} \text{ -----⑦-3} \end{aligned}$$

[①左辺の x に 1/8 代入]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1/(1^2 - (1/8)^2) + 1/(3^2 - (1/8)^2) + 1/(5^2 - (1/8)^2) + \dots \\ &= 1/((1-1/8)(1+1/8)) + 1/((3-1/8)(3+1/8)) + 1/((5-1/8)(5+1/8)) + \dots \\ &= (8^2/2) \{1/7 - 1/9 + 1/23 - 1/25 + 1/39 - 1/41 + \dots\} \text{ -----⑦-4} \end{aligned}$$

[①右辺の x に 7/8 代入] 右辺 = $(8\pi / (4 \cdot 7)) \tan(7\pi/16)$ -----⑧-1

[①右辺の x に 5/8 代入] 右辺 = $(8\pi / (4 \cdot 5)) \tan(5\pi/16)$ -----⑧-2

[①右辺の x に 3/8 代入] 右辺 = $(8\pi / (4 \cdot 3)) \tan(3\pi/16)$ -----⑧-3

[①右辺の x に 1/8 代入] 右辺 = $(8\pi / (4 \cdot 1)) \tan(\pi/16)$ -----⑧-4

上から級数 C1, C2, C3, C4 が得られる。それらを並べよう。

$$C1 = 1 - 1/15 + 1/17 - 1/31 + 1/33 - 1/47 + \dots = (\pi/16) \tan(7\pi/16)$$

$$C2 = 1/3 - 1/13 + 1/19 - 1/29 + 1/35 - 1/45 + \dots = (\pi/16) \tan(5\pi/16)$$

$$C3 = 1/5 - 1/11 + 1/21 - 1/27 + 1/37 - 1/43 + \dots = (\pi/16) \tan(3\pi/16)$$

$$C4 = 1/7 - 1/9 + 1/23 - 1/25 + 1/39 - 1/41 + \dots = (\pi/16) \tan(\pi/16)$$

[まず L(1) 級数の分割に関して]

C1, C2, C3, C4 の級数で、L(1) の級数の分割がなされていることを示す。

C1, C2, C3, C4 級数の各項に関し、符号を無視してそれらを眺めると、L(1) の各項が全て現れている。(ここまで OK である)

次に、各項の符号を考える。

1 1/3 1/5 1/7 1/9 1/11 1/13 1/15 1/17 1/19 1/21 1/23 1/25 1/27 1/29 1/31 1/33 1/35 ... の各項の +、- の符号を考えよう。下記で、黒字が C1 に、赤字が C2 に、青字が C3 に、緑字が C4 に対応する。

符号だけのブロック (8 項単位) で上記 C1, C2, C3, C4 式をながめると、(1 1/3 1/5 1/7 1/9 1/11 1/13 1/15) で 1 ブロック (+ + + + - - - -)、(1/17 1/19 1/21 1/23 1/25 1/27 1/29 1/31) で 1 ブロック (+ + + + - - - -)、(1/33 1/35 1/37 1/39 1/41 1/43 1/45 1/47) で 1 ブロック (+ + + + - - - -) ... を形成している。

仮に $C1+C2+C3+C4$ として 1 式を構成すると、 $(+ + + + - - - -) (+ + + + - - - -) (+ + + + - - - -) \dots$ となる。

これは[①左辺の x に $7/8$ 代入]他の計算の構造から、1 ブロック内の左半分はすべて+になり、右半分は全て-になることからわかる。

さて、 $L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19 + 1/21 - \dots$ であり (交代級数)、符号表記で表すと、 $L(1)$ は $(+ - + - + - + -) (+ - + - + - + -) (+ - + - + - + -) \dots$ となっている。

$C1, C2, C3, C4$ で、この $L(1)$ の符号を構成することができるだろうか? それは簡単にできて、 $C1-C2+C3-C4$ とすれば $(+ - + - + - + -) (+ - + - + - + -) (+ - + - + - + -) \dots$ とできる。

このように $5/8$ 代入で得られる級数 $C2$ と $1/8$ 代入で得られる級数 $C4$ に -1 を掛けるだけで $L(1)$ のパーツ ($-C2, -C4$) になるというまい計算構造に部分分数展開式はなっているのである。 $C1, C3$ はそのままパーツ(分身)となる。OK.

まとめると、 $C1, -C2, C3, -C4$ が分身である。

以上より、 $L(1)$ 級数は 4 分割できることがわかる。

次に、右辺である。

[次に右辺の $\tan()$ の値に関して]

$C1, C2, C3, C4$ の右辺の $\tan()$ が有理数か無理数かを調べる。結論を先に述べると、全て無理数となる。(分身は $C1, -C2, C3, -C4$ だが、符号は無視してしばらく議論する。)

$C1, C2, C3, C4$ を並べよう。

$$C1 = 1 - 1/15 + 1/17 - 1/31 + 1/33 - 1/47 + \dots = (\pi/16) \tan(7\pi/16)$$

$$C2 = 1/3 - 1/13 + 1/19 - 1/29 + 1/35 - 1/45 + \dots = (\pi/16) \tan(5\pi/16)$$

$$C3 = 1/5 - 1/11 + 1/21 - 1/27 + 1/37 - 1/43 + \dots = (\pi/16) \tan(3\pi/16)$$

$$C4 = 1/7 - 1/9 + 1/23 - 1/25 + 1/39 - 1/41 + \dots = (\pi/16) \tan(\pi/16)$$

上の右辺 $\tan()$ は、< 2 分割のケース > と同様に計算できて、

$$\tan(7\pi/16) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{4+2\sqrt{2}}, \quad \tan(5\pi/16) = -1 + \sqrt{2} + \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\tan(3\pi/16) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{4-2\sqrt{2}}, \quad \tan(\pi/16) = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

と求まる。

このように $C1, C2, C3, C4$ の右辺 $\tan()$ の値は全て無理数となる。

上記の 4 つの $\tan()$ 値が全て無理数であることは (一見して無理数に見えるが)、背理法で証明できる。

よって、 $C1, C2, C3, C4$ は $L(1)$ の有理数倍にはなり得ないことがわかった。さらに、上記 4 つの $\tan()$ 値が互いに有理数倍ともならない。なぜなら、例えば、 K を有理数として $\tan(7\pi/16) = K \cdot \tan(5\pi/16)$ などとできないからである (これも背理法で証明できる。計算は 2 分割、3 分割より長くなる。)

よって、 $C1, -C2, C3, -C4$ は全て真の分身であるとわかった。

以上から、[ゼータ分割の条件]を全て満たしているので、4 分割可能とわかった。

これまでの2分割から4分割で、完全に規則性が分かったことになる。その規則性は一般化できる。

5分割以上でも同じ規則性の繰り返しとなる。①の部分分数展開式を用いる限りにおいて、常にブロック単位(2n項単位)での符号の並びは左半分は全て+、右半分は全て-となる。そして2m分割を行いたい場合、①への(4m-1)/4m代入, (4m-3)/4m代入, (4m-5)/4m代入, (4m-7)/4m代入, . . . , 7/4m代入, 5/4m代入, 3/4m代入, 1/4m代入のうち、(4m-3)/4m代入, (4m-7)/4m代入, . . . , 5/4m代入, 1/4m代入に対応する級数に-1を掛けてできる分身たちと、残り分身たち(何も掛けない級数)を足し合わせることでL(1)を構成できる。

また(2m+1)分割を行いたい場合は、①への(4m+1)/(4m+2)代入, (4m-1)/(4m+2)代入, (4m-3)/(4m+2)代入, (4m-5)/(4m+2)代入, . . . , 7/(4m+2)代入, 5/(4m+2)代入, 3/(4m+2)代入, 1/(4m+2)代入のうち、(4m-1)/(4m+2)代入, (4m-5)/(4m+2)代入, . . . 7/(4m+2)代入, 3/(4m+2)代入に対応する級数に-1を掛けてできる分身たちと、残りの分身たち(何も掛けない級数)を足し合わせることでL(1)を構成できる。ただし(2m+1)分割は、結局は2m分割になってしまうことは上方で見た通りである。

さらに、奇数分割の中間の分身を除いて、分身が他の分身の有理数倍にならないことと、親のL(1)の有理数倍にならないことも、背理法で証明することができる。有理数倍になると仮定して矛盾を導く。(次元が高まるにつれ、計算はどんどん長くなる。しかし対称的規則性に従った単純な繰り返し計算になる。)

以上で、任意の自然数nに対して、L(1)は2n分割可能であることが分かった。

(証明終わり)

=====

このように、L(1)が2n分割可能であると分かった。

100万個でも1兆個でもいくらかでも分身たちに分割できるというのは本当に凄いことだと改めて思う。2年前は感動に震えたが、いまだに震えている。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - \dots = \pi/4$$

この式はなんども見ても飽きないものを持っている。

しかし私たちは、地上からちょっとはみ出たピラミッドの先端部分だけしか見ていない。

上式はその先端にすぎない。地下には壮大なるフラクタル構造が隠れている。

2020. 2. 24 杉岡幹生

(参考文献)

「解決! フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)

「数論I」(加藤、黒川、斎藤 著、岩波書店)

改訂 Rev1. 01 2020. 2. 27

・証明でのディリクレ指標 $\chi(a)$ の箇所にミスがあったのでその部分を削除し証明を修正した。「分割の条件」の表現を少し分かり易く変更した。