＜ n 次実[双]行列は n 次元ベクトル空間を成し、n 個の基底を持つ ＞

（その１４３）で「n 次実[双]行列は n 個の基底を持つ」という大事なことを示した。そこでは３次と４次での成立を見て n 次元でも成り立つと簡単に済ませたが、もう少し正確に証明しておきたい。つまり、「n 次実[双]行列は n 次元ベクトル空間を成し、n 個の基底を持つ」ということを今回、証明する。

いつものように、はじめに実[双]行列（実−双対角対称行列のこと）の姿を示す。例えば４次と５次では次のようになる（成分は実数）。

$$G4=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix} \qquad G5=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

注記：実−双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て 0 となるものを言う。

実[双]行列は、単位行列（E）、零行列（O）もその仲間に含む。３次の場合を示す。

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

証明の前に、まず前準備から。（その１４３）でも見た“基底”の定義を再掲しよう。

数学入門辞典（岩波書店）から。

****

基底（ベクトル空間（線形空間）の）

n 次元ベクトルのなすベクトル空間（線形空間）R^n を考える。

e_i を第 i 成分が 1、その他の成分が 0 であるような R^n の元とすると、任意の R^n の元 $x=(x_1,\cdots x_n)$ は $e_1,\cdots, e_n$ の１次結合でただ一通りに表せる。すなわち、$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ である。

このように有限次ベクトル空間Ｖの全ての元が、Ｖの n 個の元 $v_1,\cdots, v_n$ によって、$a_1v_1+\cdots+a_nv_n$（a_i は定数）と一意的に表すことができるとき、$\{v_1,\cdots, v_n\}$ をベクトル空間の基底という。

言い換えると、Ｖが $v_1,\cdots, v_n$ で張られ、$v_1,\cdots, v_n$ が１次独立であるとき、$\{v_1,\cdots, v_n\}$ をＶの基底という。

****

ここでベクトル空間（線形空間）とは、ベクトルのなす集合で、和・差・スカラー倍の操作について閉じているものである（数学入門辞典）。

基底はこのようにベクトル空間の元として定義される。“空間”とはある種の規則が定義された集合のことであり、その空間（集合）の元がベクトルである。ベクトルというと、矢印をイメージしやすいが、そのイメージは捨てたほうがよいだろう。

基底を簡潔に表現すると、ベクトル空間Ｖの任意の点を線形結合で一意に表せるベクトルの集合である。その基底の要素数（個数）を次元という。

定義文中の“１次独立”とは次のことである。
いま集合Ｖを集合Ｓ上のベクトル空間として、s,t∈Ｖ、a,b∈Ｓで

$$as + bt=0 \quad \Leftrightarrow \quad s=0 \text{ かつ } t=0$$

が成り立つとき、ベクトルｓとｔは１次独立（線形独立）であるという。

ベクトル空間の一例をあげよう。複素数全体の集合Ｃは、実数全体の集合Ｒ上のベクトル空間と見なすことができる。ｉを虚数単位として、

$a\cdot 1 + b\cdot i$

はベクトル空間（集合Ｃ）の元つまりベクトルである。ここにａ,b∈Ｒ、 1, ｉ∈Ｃ。
「$a\cdot 1 + b\cdot i=0 \Leftrightarrow a=0$ かつ $b=0$」が成り立つので１とｉは１次独立である。1,ｉで複素数（Ｃの任意の元）を一意に表現できるので、集合{1,ｉ}はベクトル空間Ｃの基底となっている。また{1,ｉ}の要素数は2個だから2次元である。

では、いよいよ証明を行うことにしよう。

＝＝＝

＜n 次実[双]行列は n 次元ベクトル空間を成し、n 個の基底を持つことの証明＞

n 次実[双]行列は n 次元ベクトル空間を成し、n 個の基底を持つことを証明する。方針として２次元、３次元、４次元を示し、規則性からｎ次元で成り立つことを示す。

＜２次のケース＞
次の 2 行 2 列（２次）の実[双]行列 G2 から成る集合G^2を考える（a,b は任意の実数）。

$$\mathbf{G2}=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

その集合G^2の基底 E_1, E_2 を次のように定義する。

$$\mathbf{E_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}、\mathbf{E_2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

基底 $\{E_1, E_2\}$ を使うと、集合G^2の任意の元（ベクトル）G2 は次のように一意に表現される。

$$\mathbf{G2}=a\mathbf{E_1} + b\mathbf{E_2}$$

ベクトル G2 を元にもつ集合G^2は、実[双]行列の性質上、和・差・スカラー倍の操作について閉じているから（実[双]行列同士を足し算、引き算しても、また実[双]行列を定数倍しても、結果は実[双]行列となる！）、２次元ベクトル空間となっている。導入した基底は、一次独立でもあり、基底の性質を満たしている。

以上より、２次実[双]行列は２次元ベクトル空間を成し、２個の基底をもつことが分かった。

＜３次のケース＞

次の 3 行 3 列（３次）の実[双]行列 G3 から成る集合 G^3 を考える（a, b, c は任意の実数）。

$$\mathbf{G3} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

その集合 G^3 の基底 E_1, E_2, E_3 を次のように定義する。

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}、E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ を使うと、集合 G^3 の任意の元（ベクトル）G3 は次のように一意に表現される。

$$\mathbf{G3} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

ベクトル G3 を元にもつ集合 G^3 は実[双]行列の性質上、和・差・スカラ一倍の操作で閉じているから３次元ベクトル空間となっている。導入した基底は、一次独立でもあり、基底の性質を満たしている。

以上より、３次実[双]行列は３次元ベクトル空間を成し、３個の基底をもつことが分かった。

＜４次のケース＞

次の 4 行 4 列（４次）の実[双]行列 G4 から成る集合 G^4 を考える（a, b, c, d は任意の実数）。

$$\mathbf{G4} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

その集合 G^4 の基底 E_1, E_2, E_3, E_4 を次のように定義する。

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}、E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}、E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基底 $\{E_1, E_2, E_3 E_4\}$ を使うと、集合 G^4 の任意の元（ベクトル）G4 は次のように一意に表現される。

$$\mathbf{G4} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

ベクトル G4 を元にもつ集合 G^4 は実[双]行列の性質上、和・差・スカラ一倍の操作で閉じているから４次元ベクトル空間となっている。また導入した基底は、一次独立でもあり、基底の性質を満たしている。

以上より、４次実[双]行列は４次元ベクトル空間を成し、４個の基底をもつことが分かった。

さて、ここで実[双]行列の定義を思い出そう。

実[双]行列とは「実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て 0 となるもの」を言う。

その形は、冒頭でみたように二つの対角線以外は全部０という非常に特異的な形をしている。（二つの対角線の成分に０があってもＯＫ）

その特異的な形から、次元が一つ上がっても基底を単純に１つ増せば、実[双]行列を基底でもって一意に表せることは容易にわかる。

例えば、５次の基底が次のようになることは４次までの過程からただちにわかる。これらが１次独立であることも容易にわかる。

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}、E_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}、E_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}、E_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}、E_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

つまり対角線の成分（要素）を表現するために必要な基底を加えることで、どんな大きさの実[双]行列でも基底たちで一意に表現できる。

この規則性から、ｎ次実[双]行列ではｎ個の基底をとれる。

以上より、n 次実[双]行列は n 次元ベクトル空間を成し、ｎ個の基底を持つことが分かった。
（証明終わり）
＝＝

このように n 次実[双]行列は n 個の基底を持つことを証明できた。

（その１４５）で証明した「実[双]行列は体を成す」という事実（定理）もあり、便利な基底を使うと、実[双]行列での計算が楽になることは、これまで述べてきた通りである。

注記：基底同士の掛け算に関しては、E_1 と E_2, でペア（独立国）を成し、E_3 と E_4 でペア（独立国）を成し、E_5 と E_6 でペア（独立国）を成し・・となっていると考えると、分かりやすい。独立国をまたいだ形での掛け算はすべてゼロ（零行列）になる。分かりやすい演算規則をもっているのである。なお、奇数次元では、最後の基底は１個でだけで独立国を成す。

実[双]行列は、ゼータ関数に直接関係するというだけでなく、掛け算に関して可換であるという特別な性質をもっていて、行列単体として見ても極めて興味深い。

いまはゼータの本道からすこし外れて、実[双]行列という洞窟を探索している状況である。

最後に備忘録として、予想やアイディアなど思いつくまま書いておく。

****
■ 前回の（その１４５）の最後で、行列方程式のことを書いた。そこでは、固有方程式の“固有“を外して、「任意の行列方程式でも実[双]行列の解があり、解と係数の関係を満たすはず」と予想したが、実数の成分に限定された実[双]行列ではそれは（完全には）成り立っていないと分かった。

複素数まで拡張した双対角対称行列では成り立っている可能性がある・・ ----①
これは複雑であり、直ぐにはわからない。２次元では①は成り立っていると分かったが。

行列方程式問題に関しては、しばらく固有値問題での固有方程式に限定して考えたい。
そのほうがケーリー・ハミルトンの公式も援用でき、考察しやすい。ただし①は面白いテーマであり、将来への宿題としたい。

■ なぜ実[双]行列が、行列単体として見ても極めて興味深いのか？
それは実[双]行列が(ガウスの)超幾何関数まで直接的につながっていることがこの２年の研究でわかったからである。

フーリエ級数 ⇒ ゼータの香りの漂う公式 ⇒ 部分分数展開式 ⇒ Ｌ(χ，ｓ)ゼータの分割 ⇒ 実[双]行列(エルミート行列) ⇒ 直交多項式 ⇒ 超幾何微分方程式 ⇒ 超幾何関数

という壮大な流れである。まさに小川からアマゾンである。
１次のゼータでこの流れがあるのならば、２次の保型形式ゼータでもあるに違いない。

■ この２年間、ゼータの分割を中心に調べてきた。
「明示的な特殊値に対応するゼータは、任意分割可能である」としてきたが、本質的には任意の偶数分割が可能である。そのことがだんだんわかってきた。例えばζ(2)の 5 分割を行っても、結局それは本質的には 4 分割になる。一方、4 分割を実行したときは 4 分割になる。
その事実は、面白いことに、実[双]行列での基底の姿に反映されている。

基底の行列成分で１が２個のものばかりの偶数次の 2n 次元の実[双]行列は、ゼータ 2n 分割に対応する。
⇒今回の証明の２次、４次の基底を参照。
⇒L(1) ２分割/４分割/８分割（その１４)、ζ(2) ２分割/４分割/８分割（その１３)

基底の行列成分で１が１個しかない基底がある奇数次の(2n+1)次元の実[双]行列は、ゼータ 2n 分割に対応している。
⇒今回の証明の３次、５次の基底を参照。
⇒L(1) ３分割/５分割（その２８)、ζ(2) ３分割/５分割（その３１)、(その３２)

「ゼータは有理数体上で何分割可能か？」を考えると上記のようなことになる。この辺は、ゼータの本道に引き返したときに説明したい。
****

すぐ上でリンクしたページは１年半ほど前の結果だが、「奇数分割は結局、偶数分割になる」という認識にほとんど到達しているが、体への認識が不足しており、甘い気づきになっていると思う。

2020. 2. 15 杉岡幹生

（参考文献）
「数学ガール／ガロア理論」(結城浩著、SB クリエイティブ)
「数学入門辞典」(青本・上野・加藤 他著、岩波書店)