

早いもので2020年は、私が初めて偶然に切稜立方体を作ってから20年目を迎える。

そこで、佐藤郁郎先生との二人三脚で幾何学模型が作れるようになって以降の、数学との関わりを振り返ってみたい。

正多面体の製作方法、とりわけ立方体から正12面体を切り出す方法は、立方体切稜法と名付けられ、出来上がる立体が正12面体に間違いないことは佐藤先生によって証明された。〔多面体木工〕2006年）

これらの成果は、おもに高校生対象の数学の授業などで活用されてきた。最近では、愛媛大学教育学部紀要（2018年）に「多面体教材一切り出しによる正十二面体の作り方」（河村泰之・三好彩夏）としてまとめられている。

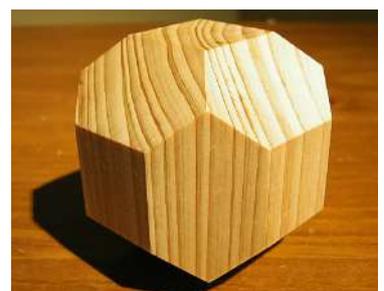
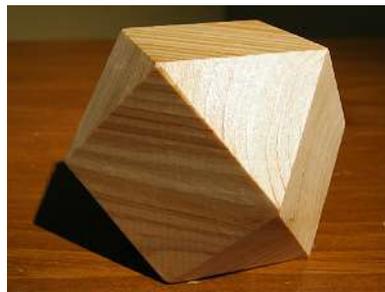
さらに、ここ10年は「切稜」を幾何学的に位置づけようとする動きもみられる。

実はこの動きは国内ではなく海外から始まった。

2011年1月、Wikipedia 英語版の Conway polyhedral notation の項目に、Conway オリジナルの11の多面体変形操作に加えて、<chamfer> と George W. Hart の<propeller> と<Refract> の3つの操作が書き込まれた。

ただし、そこには紆余曲折があった。当初は、chamfer は bevel という Conway オリジナルの操作と同一視されていた。bevel とは例としては立方体が大菱形立方八面体に変形する操作とされてきたもの。立方体を元の立体として、まず ambo という辺の中点を頂点に取り換える操作をほどこして立方八面体とし、そのすべての頂点を truncate（切頂）したもの(taC=bC)とされてきた。（実際はこの操作によっ

て作られる面は正方形ではなく長方形であり、私からみると切稜と切頂の組み合わせによらなければ大菱形立方八面体はできないのであるが、彼らはトポロジーの立場から長方形も正方形と同じとみなす。）この truncate によって作られる面が、立方体を直接 chamfer（切稜）することによって作られる面と重なることから混同されてしまったと思われる。

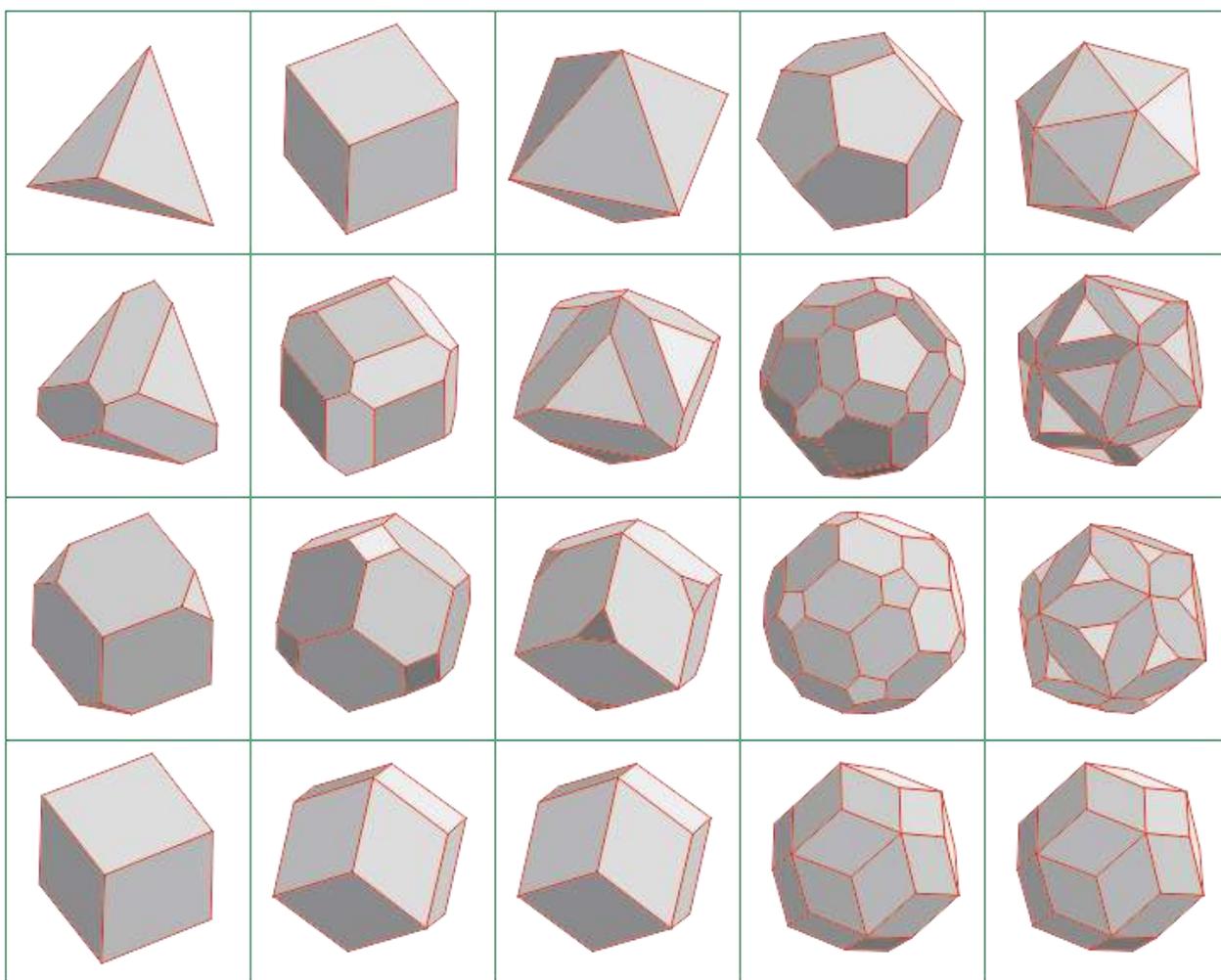


ほどなく誤解は解かれ bevel から chamfer は区別された。しかしそのさい chamfer の内容は、元の立体の頂点をそのままに、面だけを外側に離して隙間を六角形面で埋めるというものとした。

2017 年にはつぎの大きな再編成が試みられて、元の立体の edge を保存する loft とよばれる操作が chamfer に似て非なる操作として新設され、のちに chamfer は loft の特別な場合とみなされるようになって今日に至る。loft とは例えば立方体の各面に四角錐台を貼り付けるような操作で、隣り合う面に貼り付けられた角錐台の 2 側面が 1 平面となる場合が chamfer だということのようだ。

いずれにしろ、Wikipedia 英語版は、元の立体から辺に平行な平面によってその一部を切り離すこととはとらえずに、逆に元の立体の面を浮き上がらせるトポロジー的な操作として切稜(chamfer)を取り込んできたといえる。

このような海外の動きとの関係は分からないが、宮崎興二先生が 2016 年に出版された「多面体百科」に「切稜多面体」という項目がたてられ、石井源久氏の図解が紹介された。



上段の正多面体から切稜して最大限面心まで切稜して最下段に至る過程が鮮やかに示されている。これを見て私が最も驚いたのは、正四面体を切稜して立方体に至る過程だ。私が全く想像したこともなかったプロセスだったからだ。私は、この図によって正多面体相互の関係理解は新たな時代を迎えたことを

感じる。

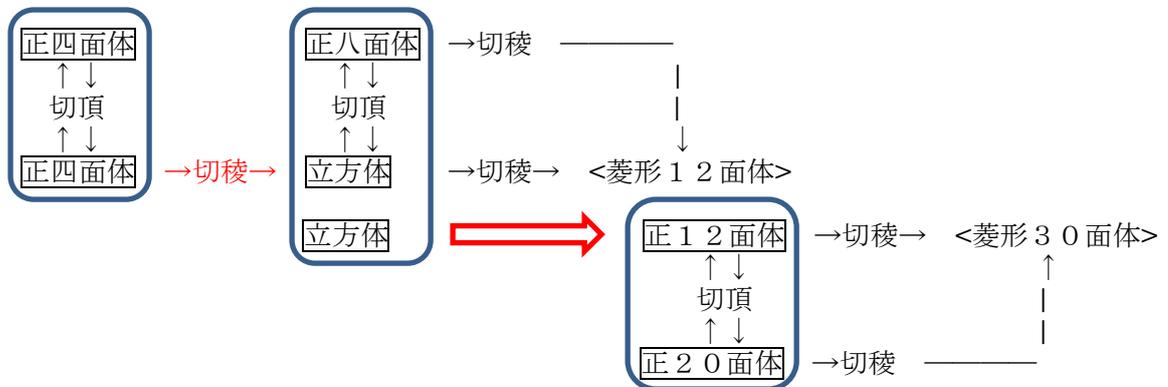
正多面体の相互の関係は従来、内接・外接の関係を除いた変形操作としては、  
正四面体 $\leftrightarrow$ 正四面体、立方体 $\leftrightarrow$ 正八面体、正12面体 $\leftrightarrow$ 正20面体の**双対**（頂点と面を入れ替える操作）  
が根幹をなしてきたといってよい。

そしてこれらの双対操作は、過程的には双方向の**切頂**と言い換えることができることも容易に理解される。ところが正四面体の自己双対、立方体と正八面体の双対、正12面体と正20面体の双対、この3本柱相互の関係はこれまで明らかにされてこなかったといって過言ではない。

こういえば、いや、正四面体を切頂すれば正八面体ができるし、立方体を切頂すれば正四面体ができるじゃないかと反論されるかもしれないし、私もそのように考えてきた。しかしよく考えてみると、正四面体の切頂過程に現れる正八面体は、辺の midpoint で切頂をとどめた結果であり、さらに最大限切頂して面心まで切頂すれば再び正四面体となるわけである。この中間産物としての正八面体と立方体の双対としての正八面体とを同じ意味合いでとらえることはできない。正四面体に内接する正八面体ととらえるのが適当である。また、立方体から正四面体への切頂は、すべての頂点ではなく半数の頂点に過ぎないから、正しくは内接関係を示しているにすぎない。

石井氏の図解から次のような正多面体相互の関係が描き出される。

出発点のもっともプリミティブな正四面体である。



こうして、正四面体の双対と立方体・正八面体の双対の2本の縦軸が、横軸をなす切稜によって関係づけられた。

残されたのは、立方体・正八面体の双対と、正12面体・正20面体の双対とを関係づけることである。もちろん私は、立方体を黄金比に切稜して正12面体となる関係がその鍵だと考えている。立方体を面心まで切稜して菱形12面体を作る場合とは切稜角度が異なるが、同じく面心まで最大限切稜することから、立方体・正八面体双対と正12面体・正20面体双対を結ぶ横軸としてとらえたいと思う。

しかしそのためには、多面体をかたまりとしてとらえることが不可欠である。切頂も切稜もかたまりから一部分を切り取る操作だからである。もちろん、切頂は伝統的な幾何学用語であり、多面体の辺上の特定の点を結んで新たな面を作ることとも表現されてきた。それは多面体をかたまりとしてとらえることを必ずしも必要としない。

しかし切稜はかたまりとしての多面体を辺（稜）に平行な平面で切り取ることで理解しなければ、内部

空間に頂点を新設することとして表現するにはあまりにも複雑である。この点が Wikipedia 英語版の紆余曲折の原因と言っても過言ではないように思う。

例えば切稜立方体の六角形が3つ合わさる頂点は、元の立方体の頂点ではなく、元の立体の面・辺・頂点のいずれとも関係づけることができない。切り取る平面3つの交点でしかないからだ。先ほど挙げた正四面体→立方体の切稜でも同様である。立方体の一つ置ききの4頂点は正四面体の各面の重心であるが、のこりの4頂点は正四面体のかたまりの内部に切り取る3つの切稜面の交点として新しく作られる。ところが Conway の多面体変形操作はいずれも新たな頂点をもとの立体の面あるいは辺の上に作るものであって、立体の内部に新たな頂点を設けるという発想はないのである。

ちなみに、2017年から Wikipedia 英語版に正多面体相互の関係を示す記述が現れたがそれは次のようなものである。

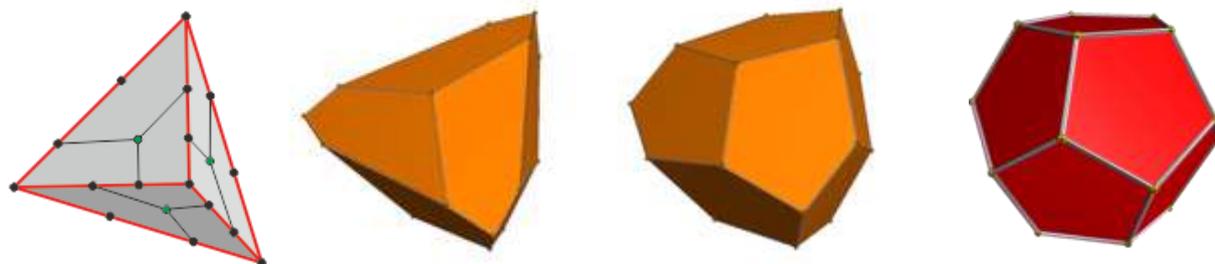
正四面体  $T$

正八面体  $aT$  (正四面体の各辺の中点を結ぶ)

立方体  $jT$  (2つの正四面体を合体させてケプラーの八角星として頂点を含む面をとる)

正20面体  $sT$  (正四面体の各面の上に小さい正三角形をねじってとり、隣接する頂点を含む面をとる)

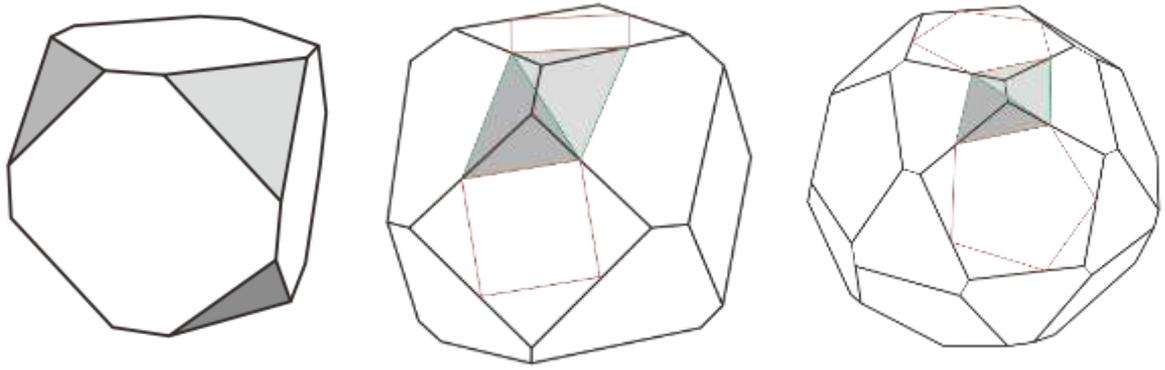
正12面体  $gT$  (三角形面を3つの五角形に分割して図のように変形させる)



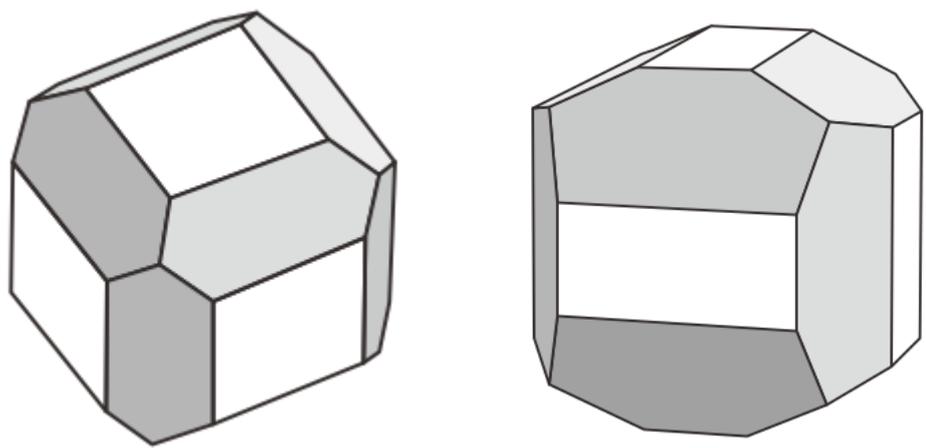
正四面体の面重心に正12面体の4頂点を内接させることができることは確かである。しかしここでも新たな頂点は正四面体の面ないし辺上に設けるという考え方が一貫している。そのため、正四面体を正12面体に変形させる際にはそのほかの場合と違って、風船を膨らませるように辺長も面の内角も自在に変えられるというトポロジ的前提を導入しなければならないものになっている。

さて、かたまりの立体から切り出すという観点から、正多面体の相互関係ばかりでなく、正多面体から半正多面体を作る方法をも考慮するならば、切頂および切稜の操作を次のように定義するのが適当であろう。

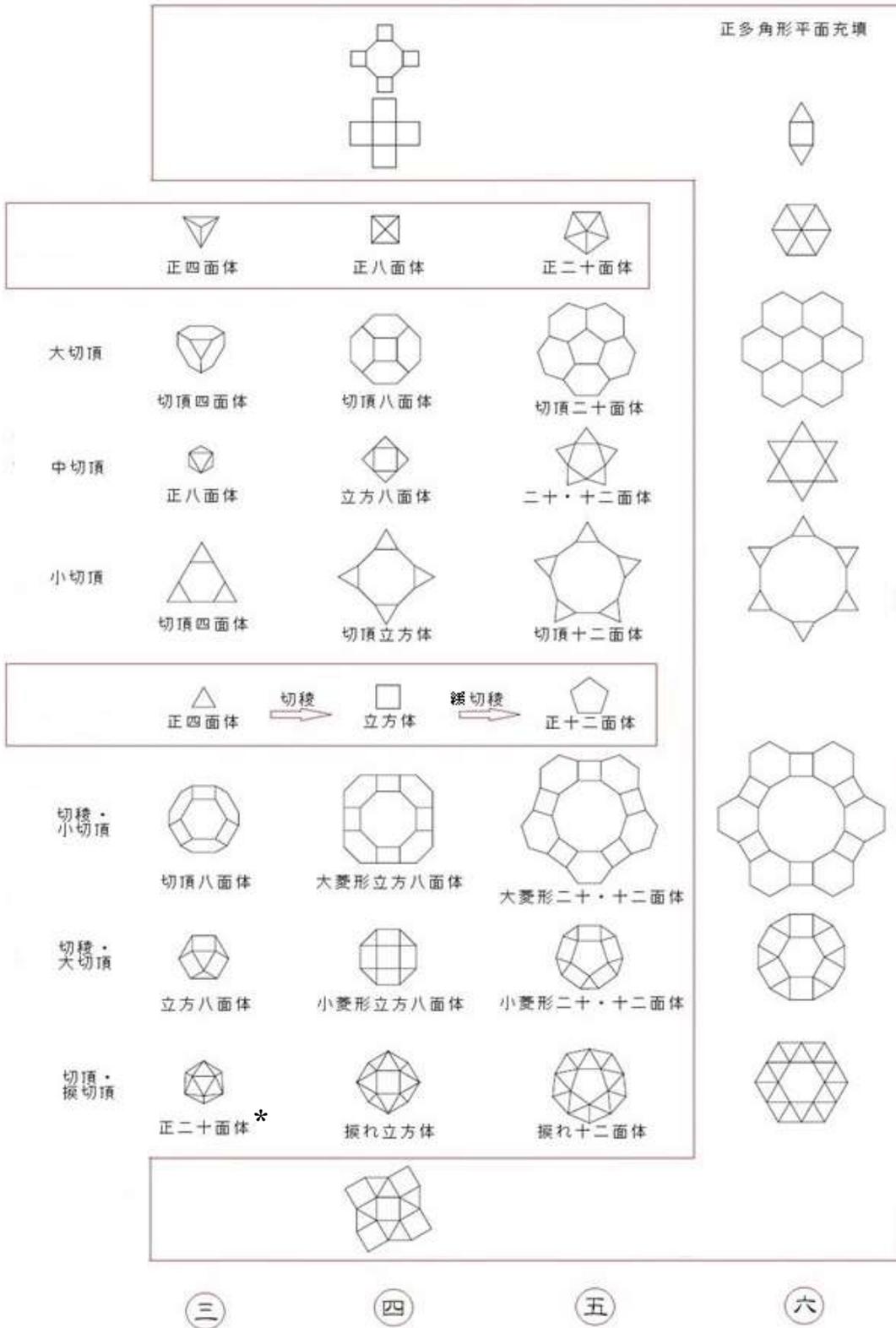
**切頂** 元の多面体のすべての頂点周りを平面によって一様に切り取ること。  
そのうち、切り取る平面が元の立体の対角線に対して直交しない場合を**傾切頂 (inclined truncate)** (中央・右図のグレーの部分) と呼んでバリエーションとする。



**切稜** 元の立体のすべての稜 (辺) 周りを稜 (辺) に平行な平面によって一様に切り取ること。  
そのうち、切り取る平面が元の立体の重心から稜 (辺) への法線ベクトルに対して直交しない場合を**緩切稜 (pyrite chamfer)** (右図のグレーの部分) と呼んでバリエーションとする。



もっともプリミティブな立体・正四面体から出発して、すべての正多面体と半正多面体は、各々バリエーションを含む切稜と切頂のたかだか2種類の操作によって作り出すことができる。そこにはトポロジ的柔軟性を持ち込む必要もない。一覧表を参照されたい。上半分の小切頂・中切頂・大切頂は、中段のもとになる立体からの切頂の段階的な深さを示している。下半分は、「・」で2段階の操作の組み合わせを示している。例えば大菱形立方八面体は、立方体を切稜して得られた切稜立方体の8つすべての頂点 (六角形が3つ集まっている) を比較的浅く切頂することで作られるという意味あいである。



(\*) 正四面体から正二十面体への切頂・振切頂では、最初の切頂を辺の中点までとするので隣り合う切頂面の頂点が重なって1点となり正八面体ができる。よって正八面体からの振切頂は、1つの頂点を別の2平面で切り取ることになる。