＜実−双対角対称行列と行列方程式＞ rev1.01

最近発見した事実を整理しておきたい。
それは、
「ｎ次の実−双対角対称行列は、そのｎ次固有方程式に対応するｎ次行列方程式において、ｎ個の行列解をもつ。それらｎ個の行列解は、解と係数の関係を満たす。」------①

という非常に面白い事実である。

注記：実−双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て０の行列である。

まだ２次、３次の場合に確認したのみで厳密には予想であるが、上記①は確実に成り立っているはずである。２次は（その１３７）で、３次は（その１３８）の最後の＜発見した事実＞で粗く述べた。

この事実は、ゼータの分身を固有値として持つ行列の研究から分かってきたが、ゼータ研究とは切り離して行列の理論として見ても、きわめて興味深い。

①は、全く自明ではない。それは（その１３７）で証明した“実−双対角対称行列は掛け算に関して可換”という事実の上に成立するものだからである。解と係数の関係の関係もあり、可換でないと①は成り立たない。
上記①はケーリー・ハミルトンの公式よりもずっと深いことを主張している。（実−双対角対称行列でも当然ケーリー・ハミルトンの公式は成り立つ。）

２次と３次のケースを整理し直した形で、書いておく。

＝＝

実−双対角対称行列の方程式

＜２次のケース＞

L(3)２分身の値を固有値に持つエルミート行列（実−双対角対称行列）は二つ存在する。それを $G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p としよう。$G2_{L(3)}$ と $G2_{L(3)}$-p は、

行列方程式 $X^2 -16X -8E = O$ ------②

の二つの解となる。
ここで、X, E, O は２次の正方行列。E は単位行列、O は零行列。

$G2_{L(3)}$-p は上記 $G2_{L(3)}$ の上記の λ_1 と λ_2 の置換（２次の置換）を行って得られるもので、次のものである。
$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p を並べる。

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\sqrt{2}\\6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}$$

$$G2_{L(3)}\text{-p}=\begin{bmatrix}(\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -6\sqrt{2}\\-6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}$$

$G2_{L(3)}$と$G2_{L(3)}$-p は②における解と係数の関係　$G2_{L(3)}+G2_{L(3)}$-p＝16E, $G2_{L(3)}G2_{L(3)}$-p（＝$G2_{L(3)}$-p$G2_{L(3)}$）＝-8E　を満たしている。

上記は、$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p に共通の代数(固有)方程式 x^2 -16x -8＝0 ----③と、その解（固有値）λ_1とλ_2の解と係数の関係（$\lambda_1+\lambda_2$＝16, $\lambda_1\lambda_2$＝-8）に完全に呼応している。

$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p は共に共通の固有値λ_1とλ_2と共通の固有ベクトル p_1, p_2を持つが、固有値と固有ベクトルの関係はそれぞれで入れ違っている。

＜３次のケース＞

L(3)３分身の値(三つの値)を固有値として持つエルミート行列（実-双対角対称行列）は６個存在する。その６個の行列は、３つの固有値解λ_1, λ_2, λ_3の相互の置換操作（３次の置換）で得られる。それらを

$G3_{L(3)}$,　$G3_{L(3)}$-f1,　$G3_{L(3)}$-f2,　$G3_{L(3)}$-g1,　$G3_{L(3)}$-g2,　$G3_{L(3)}$-g3

としよう。

$G3_{L(3)}$-f1 と $G3_{L(3)}$-f2 は、次のように$G3_{L(3)}$の（λ_1 λ_2 λ_3）の巡回置換から得られる。恒等置換も含めて巡回置換の三つを示す。

巡回置換⇒ $\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3\\\lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3\end{pmatrix}$: $G3_{L(3)}$,　$\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3\\\lambda 2 & \lambda 3 & \lambda 1\end{pmatrix}$: $G3_{L(3)}$-f1,　$\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3\\\lambda 3 & \lambda 1 & \lambda 2\end{pmatrix}$: $G3_{L(3)}$-f2

ここで例えば、$\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3\\\lambda 3 & \lambda 1 & \lambda 2\end{pmatrix}$は、$\lambda_1$を$\lambda_3$に、$\lambda_2$を$\lambda_1$に、$\lambda_3$を$\lambda_2$に置き換える置換である。

$G3_{L(3)}$、$G3_{L(3)}$-f1 、$G3_{L(3)}$-f2 を並べる。

$$G3_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_3)/2 & 0 & (\lambda_1-\lambda_3)/2\\0 & \lambda_2 & 0\\(\lambda_1-\lambda_3)/2 & 0 & (\lambda_1+\lambda_3)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28 & 0 & 16\sqrt{3}\\0 & -2 & 0\\16\sqrt{3} & 0 & 28\end{bmatrix}$$

$$G3_{L(3)}\text{-f1}=\begin{bmatrix}(\lambda_2+\lambda_1)/2 & 0 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\0 & \lambda_3 & 0\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & 0 & (\lambda_2+\lambda_1)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13+8\sqrt{3} & 0 & -15-8\sqrt{3}\\0 & 28-16\sqrt{3} & 0\\-15-8\sqrt{3} & 0 & 13+8\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$G3_{L(3)}\text{-f2}=\begin{bmatrix}(\lambda_3+\lambda_2)/2 & 0 & (\lambda_3-\lambda_2)/2\\0 & \lambda_1 & 0\\(\lambda_3-\lambda_2)/2 & 0 & (\lambda_3+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13-8\sqrt{3} & 0 & 15-8\sqrt{3}\\0 & 28+16\sqrt{3} & 0\\15-8\sqrt{3} & 0 & 13-8\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

次に $G3_{L(3)}$-g1、$G3_{L(3)}$-g2、$G3_{L(3)}$-g3 は、３次の置換（全部で６個ある）から上記巡回置換分を除いた残りの三つの置換から得られる。次のものである。

残りの三置換⇒$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ \lambda 1 & \lambda 3 & \lambda 2 \end{pmatrix}$：$G3_{L(3)}$-g1，　$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ \lambda 3 & \lambda 2 & \lambda 1 \end{pmatrix}$：$G3_{L(3)}$-g2，　$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ \lambda 2 & \lambda 1 & \lambda 3 \end{pmatrix}$：$G3_{L(3)}$-g3

$G3_{L(3)}$-g1、$G3_{L(3)}$-g2、$G3_{L(3)}$-g3 を並べる。

$$G3_{L(3)}\text{-g1}=\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & 0 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & 0 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13+8\sqrt{3} & 0 & 15+8\sqrt{3} \\ 0 & 28-16\sqrt{3} & 0 \\ 15+8\sqrt{3} & 0 & 13+8\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$G3_{L(3)}\text{-g2}=\begin{bmatrix} (\lambda_3+\lambda_1)/2 & 0 & (\lambda_3-\lambda_1)/2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ (\lambda_3-\lambda_1)/2 & 0 & (\lambda_3+\lambda_1)/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 & 0 & -16\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -16\sqrt{3} & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$G3_{L(3)}\text{-g3}=\begin{bmatrix} (\lambda_2+\lambda_3)/2 & 0 & (\lambda_2-\lambda_3)/2 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ (\lambda_2-\lambda_3)/2 & 0 & (\lambda_2+\lambda_3)/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13-8\sqrt{3} & 0 & -15+8\sqrt{3} \\ 0 & 28+16\sqrt{3} & 0 \\ -15+8\sqrt{3} & 0 & 13-8\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

さて、{$G3_{L(3)}$，$G3_{L(3)}$-f1，$G3_{L(3)}$-f2} と {$G3_{L(3)}$-g1，$G3_{L(3)}$-g2，$G3_{L(3)}$-g3} は、ともに

行列方程式 $X^3 -54X^2 -96X +32E＝O$ ---④

の三つの解となる。

ここで、X, E, O は３次正方行列。E は単位行列、O は零行列。

{$G3_{L(3)}$，$G3_{L(3)}$-f1，$G3_{L(3)}$-f2} と {$G3_{L(3)}$-g1，$G3_{L(3)}$-g2，$G3_{L(3)}$-g3} はそれぞれ④における解と係数の関係を満たしている。前者は次となる。後者も同様に成り立つ。

$G3_{L(3)}$ + $G3_{L(3)}$-f1 + $G3_{L(3)}$-f2＝54E

$G3_{L(3)}G3_{L(3)}$-f1 + $G3_{L(3)}$-f1$G3_{L(3)}$-f2 + $G3_{L(3)}$-f2$G3_{L(3)}$＝-96E

$G3_{L(3)}G3_{L(3)}$-f1$G3_{L(3)}$-f2＝-32E

上記のことは、６個の $G3_{L(3)}$，$G3_{L(3)}$-f1，$G3_{L(3)}$-f2，$G3_{L(3)}$-g1，$G3_{L(3)}$-g2，$G3_{L(3)}$-g3 に共通の代数(固有)方程式 $x^3 -54x^2 -96x +32=0$ -------⑤と、その共通の解（固有値）λ_1，λ_2，λ_3における解と係数の関係（$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=54$，$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=-96$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-32$）と完全に呼応している。

三つの解 {$G3_{L(3)}$，$G3_{L(3)}$-f1，$G3_{L(3)}$-f2} の各行列は、全て共通の固有値λ_1，λ_2，λ_3と共通の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を持つが、固有値と固有ベクトルの関係はそれぞれで入れ違っている。もう一組の三解 {$G3_{L(3)}$-g1，$G3_{L(3)}$-g2，$G3_{L(3)}$-g3} も同様である。

＝＝

このように「実-双対角対称行列の固有方程式」と「対応する行列方程式」という別視点の間で、きれいな対応関係が成り立っているのである。これは驚くべきことと思え、深い何かがあるように感じる。

行列方程式論というのが、できたりするのかもしれない。まだわからないことだらけである。

いずれにしても、行列の方程式が議論できるのは、(その１３７)で証明した「実-双対角対称行列は掛け算に関して可換である」という決定的な事実があるからである。そのことを再度、確認しておきたい。(AB=BA が成り立つおかげで、解と係数の関係での掛け算の順番を気にせずに済む！)

以下、気になる点をメモしておく。

****

●＜３次のケース＞で見た３次の置換は、群を成し、３次対称群（３次置換群）となる。３次対称群は６個の元を持つ。解 $\{G3_{L(3)},\ G3_{L(3)}-f1,\ G3_{L(3)}-f2\}$ は次の巡回置換に対応する。

巡回置換⇒ $\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \end{pmatrix}$: $G3_{L(3)}$,　$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ \lambda 2 & \lambda 3 & \lambda 1 \end{pmatrix}$: $G3_{L(3)}-f1$,　$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ \lambda 3 & \lambda 1 & \lambda 2 \end{pmatrix}$: $G3_{L(3)}-f2$

この巡回置換の集合（巡回群）は３次対称群の部分群であり、しかも正規部分群となっている。正規部分群は方程式論、ガロア理論において重要である。ゼータの分身の値は、πを除いた部分は美しいべき乗根で表現されるので、その辺と関連があるに違いない。
６個の置換から巡回置換３個を除いた残り３個の置換から作られる三行列 $\{G3_{L(3)}-g1,\ G3_{L(3)}-g2,\ G3_{L(3)}-g3\}$ も、同じ行列方程式の三解となるのは意味深い。

３次対称群の６個の元から３個を取り出す組み合わせは２０通りもあるが、その中の２通りだけが行列方程式の解と係数の関係を満たす三解を作り出す（３次の場合）。

●３次の場合、解 $\{G3_{L(3)},\ G3_{L(3)}-f1,\ G3_{L(3)}-f2\}$ と別解 $\{G3_{L(3)}-g1,\ G3_{L(3)}-g2,\ G3_{L(3)}-g3\}$ を合わせると、結局、④をただ単に満たすという意味では６個の解をもつ。

$$\text{行列方程式 } X^3 -54X^2 -96X +32E = O \quad ---④$$

しかし、解と係数の関係を満足するという意味では、
$\{G3_{L(3)},\ G3_{L(3)}-f1,\ G3_{L(3)}-f2\}$ または $\{G3_{L(3)}-g1,\ G3_{L(3)}-g2,\ G3_{L(3)}-g3\}$ の組み合わせでしかありえない。
であるから「④の解は三つあるが、その三解は２セットある」という言い方がよいだろう。
普通の代数方程式ではそんなことは起こらない。この違いを追求することで、面白いことが飛び出すに違いない。

****

2019.12.15　杉岡幹生

2019.12.28 改訂(rev1.01)　特殊中心対称行列を実-双対角対称行列に置き換えた。その関連の記述を変更。
置換の表現方法を若干変えた。