<ゼータ分身値を固有値に持つ実−双対角対称行列は、掛け算に関して可換>rev1.01

（その１３７）の最後で述べた興味深い事実を証明しておきたい。また一番最後に、最近発見したある面白い事実を書いた。

****
●実対称行列は一般に掛け算に関して非可換だが、ゼータｎ分身を固有値として持つ実−双対角対称行列は掛け算に関して<u>可換である</u>。２分身の場合を今回見たが、任意のｎ分身でも成立する。証明は後日示したい。

注記：実−双対角対称行列は、実対称行列の一種で、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つ双方の対角線以外の成分は全て０の行列である。
****

証明したいのは上のことであるが、その前に、まず「実対称行列で、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称な行列は、一般には掛け算に関して<u>非可換である</u>」ことを見ておきたい。

例えば、

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 10 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}100 & 300 & 2\\ 300 & 7 & 300\\ 2 & 300 & 100\end{bmatrix}$$

という二つを考えよう。（A も B も、実対称行列であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称な行列である。）

さて、AB＝BA が成り立つだろうか？じつは成り立たない。

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 10 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100 & 300 & 2\\ 300 & 7 & 300\\ 2 & 300 & 100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1010 & 1821 & 1402\\ 3306 & 1870 & 3306\\ 1402 & 1821 & 1010\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}100 & 300 & 2\\ 300 & 7 & 300\\ 2 & 300 & 100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 10 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1010 & 3306 & 1402\\ 1821 & 1870 & 1821\\ 1402 & 3306 & 1010\end{bmatrix}$$

このように AB＝BA は成立しない。実対称行列で、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称な行列は、掛け算に関して一般に<u>非可換</u>なのである。

次にＬ(1)、ζ(2)や現在見ているＬ(3)での「ゼータ分身値を固有値に持つ実対称行列」を見てみよう。それは右下方向と左下方向の両対角線以外の成分は全て０という特別な行列つまり<u>実−双対角対称行列</u>となっている。

（その１３３）や（その１３４）から、例えばＬ(3)の３分身や４分身の値を固有値に持つ行列は、以下のようになる（記法は若干変えた）。

まずＬ(3)３分身の値λ_1, λ_2, λ_3を固有値にもつ行列は次のものである（G3 の 3 は 3 次を表す)。

$$G3_{L(3)}=\begin{bmatrix}\alpha 1 & 0 & \alpha 2\\ 0 & \beta & 0\\ \alpha 2 & 0 & \alpha 1\end{bmatrix} \quad \text{-----①}$$

ここで「$\alpha 1$と$\alpha 2$とβは、固有方程式 $x^3 -54x^2 -96x +32=0$ の三つの解λ_1, λ_2, λ_3から次のように構成されるものである。

$\alpha 1=(\lambda_1+\lambda_3)/2$

$\alpha 2=(\lambda_1-\lambda_3)/2$

$\beta=\lambda_2$

なお、λ_1, λ_2, λ_3は次の値をとる。

$\lambda_1= \sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)= 28 +16\sqrt{3}$

$\lambda_2=-\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)= -2$

$\lambda_3= \sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12) = 28 -16\sqrt{3}$

またさらに、Ｌ(3)４分身の値λ_1, λ_2, λ_3, λ_4を固有値にもつ行列は次のものである（G4 の 4 は 4 次を表す)。

$$G4_{L(3)}=\begin{bmatrix}\alpha 1 & 0 & 0 & \alpha 2\\ 0 & \beta 1 & \beta 2 & 0\\ 0 & \beta 2 & \beta 1 & 0\\ \alpha 2 & 0 & 0 & \alpha 1\end{bmatrix} \quad \text{-----②}$$

ここで、$\alpha 1$, $\alpha 2$, $\beta 1$, $\beta 2$は、固有方程式 $x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$ の四つの解λ_1, λ_2, λ_3, λ_4から次のように構成されるものである。

$\alpha 1=(\lambda_1+\lambda_4)/2$

$\alpha 2=(\lambda_1-\lambda_4)/2$

$\beta 1=(\lambda_2+\lambda_3)/2$

$\beta 2=(-\lambda_2+\lambda_3)/2$

なお、λ_1, λ_2, λ_3, λ_4は次の値をとる。

$\lambda_1= \sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)= 32 +24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$\lambda_2=-\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)= 32 -24\sqrt{2} +16\sqrt{(2-\sqrt{2})} -14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$\lambda_3= \sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)= 32 -24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$\lambda_4=-\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16) = 32 +24\sqrt{2} -16\sqrt{(2+\sqrt{2})} -14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

このように、明示的なＬ（χ，ｓ）ゼータ特殊値の分身の値を固有値として持つ行列は、双方の対角線の成分以外は全て０という特別な形の実-双対角対称行列になる。そして、この行列は掛け算に関して可換となる。

以下で、実−双対角対称行列は、掛け算に関して可換であることを証明する。

［２次のケース］

上の前段説明では出さなかったが、Ｌ(3)２分身の２次の実−双対角対称行列をまず調べてみる。
この２次のケースが証明全体の基本形を与える。その意味で２次は重要である。

Ｌ(3)２分身の実−双対角対称行列が次のような形になることは（その１３３）で見た。

$$G=\begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a2 & a1 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} A1 & A2 \\ A2 & A1 \end{bmatrix}$$

これらが可換であるかどうか(GL＝LG となるか)を調べよう。簡単な計算から、GL と LG は次となる。

$$GL=\begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a2 & a1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A1 & A2 \\ A2 & A1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a1A1+a2A2 & a1A2+a2A1 \\ a1A2+a2A1 & a1A1+a2A2 \end{bmatrix}$$

$$LG=\begin{bmatrix} A1 & A2 \\ A2 & A1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a2 & a1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a1A1+a2A2 & a1A2+a2A1 \\ a1A2+a2A1 & a1A1+a2A2 \end{bmatrix}$$

この右辺値の各成分は２次元ベクトルの内積を計算しているわけであるが、対称性から、GL でも LG でも、そのベクトルの内積は上記の通り全く同じになる。

よって GL＝LG となる。２次のケースは掛け算に関して可換と分かった。

さらに上記の通り、２次のケースにおいて、双方の(右下方向と左下方向の)対角線以外は全て 0 の形の実−双対角対称行列同士の掛け算の結果は、双方の対角線以外は全て 0 の形の実−双対角対称行列となることがわかる。0 がないので、２次の場合はわかりにくいが。

注記：上記の右辺の結果は、GL と LG が等しいことが一目でわかるように足し算の順番は変えている。例えば、a2A2+a1A1 は a1A1+a2A2 などとした。

［３次のケース］

次に、①を参照して次の形のＬ(3)３分身の実−双対角対称行列を調べる。

$$G=\begin{bmatrix} a1 & 0 & a2 \\ 0 & b & 0 \\ a2 & 0 & a1 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} A1 & 0 & A2 \\ 0 & B & 0 \\ A2 & 0 & A1 \end{bmatrix}$$

この二つが可換であるかどうか(GL＝LG となるか)を調べよう。

$$GL=\begin{bmatrix} a1 & 0 & a2 \\ 0 & b & 0 \\ a2 & 0 & a1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A1 & 0 & A2 \\ 0 & B & 0 \\ A2 & 0 & A1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a1A1+a2A2 & 0 & a1A2+a2A1 \\ 0 & bB & 0 \\ a1A2+a2A1 & 0 & a1A1+a2A2 \end{bmatrix}$$

$$LG=\begin{bmatrix}A1 & 0 & A2\\ 0 & B & 0\\ A2 & 0 & A1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a1 & 0 & a2\\ 0 & b & 0\\ a2 & 0 & a1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a1A1+a2A2 & 0 & a1A2+a2A1\\ 0 & bB & 0\\ a1A2+a2A1 & 0 & a1A1+a2A2\end{bmatrix}$$

このように３次も GL＝LG となった。

G や L の元の形が、双方の(右下方向と左下方向の)対角線の成分以外は全て 0 という形だから、双方の対角線以外の成分を与える３次元ベクトルの内積計算は上記右辺の通りきれいに全部 0 になる。

また、GL と LG の上記右辺の双方の対角線の成分も当然３次元ベクトルの内積計算結果であるわけだが、その内積も(ベクトルの成分に 0 が一つあるおかげで)実質的には[２次のケース]の２次元ベクトルの内積と全く同じものになり（注記）、結局、GL と LG の対応する各成分は等しくなって、GL=LG が成り立つ。

また上記の結果から、３次のケースも、双方の対角線以外は全て 0 の形の実-双対角対称行列同士の掛け算の結果は、双方の対角線以外は全て 0 の形の実-双対角対称行列となることがわかる。

注記：ただし中央の(2,2)成分の bB だけは３次元ベクトル同士の内積が(ベクトルの成分に 0 が二つあるおかげで)実質的には１次元ベクトル（単なる数！）の内積と同じになる。３次のケースのみならず、これは５次のケース、７次のケース・・の奇数次で同様に成り立つ。

［４次のケース］

４分身の場合も同様だが、以下見てみよう。②から４分身の値を固有値として持つ実-双対角対称行列は次の形になる。

$$G=\begin{bmatrix}\alpha1 & 0 & 0 & \alpha2\\ 0 & b1 & b2 & 0\\ 0 & b2 & b1 & 0\\ \alpha2 & 0 & 0 & \alpha1\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}A1 & 0 & 0 & A2\\ 0 & B1 & B2 & 0\\ 0 & B2 & B1 & 0\\ A2 & 0 & 0 & A1\end{bmatrix}$$

掛け算の GL と LG の結果だけ書くと、次のようになる。

$$GL=\begin{bmatrix}a1A1+a2A2 & 0 & 0 & a1A2+a2A1\\ 0 & b1B1+b2B2 & b1B2+b2B1 & 0\\ 0 & b1B2+b2B1 & b1B1+b2B2 & 0\\ a1A2+a2A1 & 0 & 0 & a1A1+a2A2\end{bmatrix}$$

$$LG=\begin{bmatrix}a1A1+a2A2 & 0 & 0 & a1A2+a2A1\\ 0 & b1B1+b2B2 & b1B2+b2B1 & 0\\ 0 & b1B2+b2B1 & b1B1+b2B2 & 0\\ a1A2+a2A1 & 0 & 0 & a1A1+a2A2\end{bmatrix}$$

このように４次でもやはり GL＝LG となる。
G や L の元の形が、双方の(右下方向と左下方向の)対角線以外は全て 0 という形であることから、双方の対角線以外の成分を与える４次元ベクトルの内積計算は上記右辺の通りきれいに全部 0 になる。
また、GL と LG の上記右辺の双方の対角線の成分も当然４次元ベクトルの内積となるが、その内積も(ベクトルの成分に 0 が二つあるおかげで)実質的には[２次のケース]の２次元ベクトルの内積と全く同じものになり（GL や LG の４隅の４成分と中央付近に固まっている４成分を見よ！)、結局、GL と LG の対応する各成分は等しくなって、GL=LG が成り立つ。

また上記の結果から、４次のケースも、双方の対角線以外は全て 0 の形の実−双対角対称行列同士の掛け算の結果は、双方の対角線以外は全て 0 の形の実−双対角対称行列となることがわかる。つまり、形が保存される。

[２次のケース][３次のケース][４次のケース]を見てきたが、これが５次、６次、７次・・でも全く同様に成り立つ。次元がどんどん増えても、行列の掛け算での各成分におけるベクトルの内積計算が[２次のケース]（２次元ベクトルの内積）に還元されてしまうのである。

よって、２次、３次、４次で成り立つことは全ての次元で成り立つことが分かる。

これにより、実−双対角対称行列は掛け算に関して可換であることが分かった。また実−双対角対称行列同士の掛け算の結果も、やはり実−双対角対称行列となる。すなわち形が保存される。

[証明終わり]

定理としてまとめておく。
****
＜実−双対角対称行列に関する定理＞

●実−双対角対称行列の集合での任意の二つの元は、掛け算に関し可換である。

●実−双対角対称行列同士の掛け算の結果は、実−双対角対称行列となる（形が保存される)。

注記：実−双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つ双方の対角線以外の成分は全て 0 の行列である。
****

この定理にも関係するのだが、じつは最近、別の面白い事実を発見した。

それは、上記の定理を前提して成り立つものであり、よって、先に「実−双対角対称行列は掛け算に関して可換である」ことを示しておきたかったのである。

その「別の面白い事実」を粗く書いておく。

****
＜発見した事実＞

●L(3)３分身の値を固有値として持つ行列は６個存在する（一つでなかった)。その６個の行列は、３つの固有値解λ_1, λ_2, λ_3の相互の置換操作で得られる。
６個とも、固有方程式 $x^3 -54x^2 -96x +32=0$ ---[1] の三つの解(固有値)λ_1, λ_2, λ_3を共通のものとして持つ。その三解は、解と係数の関係を満たす。

●上記の６個の行列のうち、λ_1, λ_2, λ_3の巡回置換で得られる３個と、それを除いた残りの３個の行列は、上記[1]に完全に対応した形の行列方程式 $X^3 -54X^2 -96X +32E=O$ ---[2] を満たす。その三解は、解と係数の関係を満たす。

注記：λ_1, λ_2, λ_3の置換でできる三つの組み合わせは全部で 20 通りあるが、[2]の三解となる（解と係数の関係を満たす）のは上記の２組の組み合わせのみである。

****

これは、２分身でも成り立つが、一般性が高いと思える３分身のものを書いた。６個の行列は、実-双対角対称行列である。

上記は（その１３７）辺りから分かってきたことである。[1]と[2]の対応があまりに見事で、それに驚いている。

別の地下空間に出た感があるが、よく調べていく必要がある

2019.12.09　杉岡幹生

19.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を実-双対角対称行列に置き換えた。その周辺の記述を変更。