＜L(3) ２分身の値を固有値として持つ行列は二つ存在する　その２＞ rev1.01

（その１３３）でＬ(3) ２分身の値を固有値として持つ行列を求めたが、その行列は一意に決まるのではなく、二つ存在すると分かった。それは２個の固有値を置換したものそれぞれに対応したものとなる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●普通の対称行列は掛け算に関して一般に非可換だが、ゼータ n 分身を固有値として持つ特別な実-双対角対称行列は、掛け算に関して可換である。２分身の場合をまず示す。

注記：実-双対角対称行列は、実対称行列の一種で、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つ双方の対角線以外の成分は全て０の行列である。実-双対角対称行列は（その１３３）で定義した。

●L(3) ２分身の値を固有値に持つ行列は二つ存在する。それを $G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p とすると、$G2_{L(3)}$ と $G2_{L(3)}$-p は、行列の方程式 X^2 -16X -8E＝O ---⑧の解となる。

ここで、X, E, O は 2 行 2 列の正方行列。E は単位行列、 O は零行列。

⑧で解と係数の関係　$G2_{L(3)}$ +$G2_{L(3)}$-p＝16E,　$G2_{L(3)}G2_{L(3)}$-p (＝$G2_{L(3)}$-p$G2_{L(3)}$)＝-8E　が成り立つ。

上記は $G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p に共通の固有方程式 x^2 -16x -8=0 ----②と、その解（固有値）λ_1 と λ_2 における解と係数の関係（$\lambda_1+\lambda_2$=16,　$\lambda_1\lambda_2$=-8）に完全に呼応している。

すなわち、⑧と②で、方程式の形と解と係数の関係が同じ（同型）となっている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まず（その１３３）の結果を簡単に復習し、その後上のことを示す。

L(3) は、L(s) の s=3 の次のものである。

L(3)＝1 $-1/3^3$ $+1/5^3$ $-1/7^3$ $+1/9^3$ $-1/11^3$ $+1/13^3$ $-1/15^3$ +・・＝$\pi^3/32$　　-----①

＝＝

■L(3) ２分割

A1＝ 1 - $1/7^3$ $+1/9^3$ $-1/15^3$ + $1/17^3$ $-1/23^3$ +　・・＝$(\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

A2＝$1/3^3$ $-1/5^3$ $+1/11^3$ $-1/13^3$ + $1/19^3$ $-1/21^3$ +・・　＝$(\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

A1 -A2＝L(3)＝$\pi^3/32$ である。A1, -A2 が L(3) の２分身である。右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$＝ 8 $+6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$　＝ -8 $+6\sqrt{2}$

＝＝

上記 A1, -A2 の値（右辺値）から $(\pi/8)^3$ を省いた $\lambda_1=\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$ と $\lambda_2=-\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$ の二つを解にもつ代数方程式は次となる。

L(3) ２分身を解にもつ代数方程式⇒ x^2 -16x -8=0　　　-----②

②の解を固有値としてもつ行列（実対称行列、エルミート行列）は次となる(G2 の 2 は 2 次を表す)。

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix} 8 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \end{bmatrix}$$

この行列の<u>固有</u>方程式は、$x^2 -16x -8=0$ となり、②の<u>代数</u>方程式に一致する。その解の二つの固有値は当然ながら②の解、つまりL(3)２分身の値（特殊値）λ_1とλ_2に一致する。固有値とその固有ベクトルを示す。

固有値λ_1＝ $\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)=8+6\sqrt{2}$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値λ_2＝ $-\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)=8-6\sqrt{2}$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

p_1, p_2は互いに直交しており、規格化されている。これら固有ベクトルはL(1)、ζ(2)の場合と同じである。

さて、「L(3)２分身の実対称行列（エルミート行列）は二つ存在し、それは固有値λ_1, λ_2を置換した場合にそれぞれ対応したものとなる」ことを以下に示す。

まず②の方程式はλ_1, λ_2の<u>置換に関して不変</u>である。なぜなら②は、$x^2 -16x -8=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=0$ であり、λ_1とλ_2を互いに置き換えても方程式は変わらないからである。

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix} 8 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \end{bmatrix} \quad \text{-----③}$$

さて、この $G2_{L(3)}$ に対しλ_1, λ_2の置換を行うと次の $G2_{L(3)}$-p となる。p は置換 permutation の意味。

$$G2_{L(3)}\text{-p}=\begin{bmatrix} 8 & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2 \\ (\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2 \end{bmatrix} \quad \text{-----④}$$

④の右下方向への対角成分は③と同じである。左下方向への対角成分は、絶対値は③と同じで符号だけ逆になっている。

$G2_{L(3)}$ と $G2_{L(3)}$-p の固有方程式は、<u>どちらも②となり同じ（共通）</u>である。

また $G2_{L(3)}$-p の固有ベクトルは $G2_{L(3)}$ の p_1, p_2と<u>一致する（不変）</u>。ただし、p_1に対する固有値はλ_2となり、p_2に対する固有値はλ_1となって、次のように $G2_{L(3)}$のケースと<u>逆になる</u>。

$G2_{L(3)}\text{-p}\ p_1=\lambda_2\ p_1$

$G2_{L(3)}\text{-p}\ p_2=\lambda_1\ p_2$

③、④から次の関係が成り立つ。

$$G2_{L(3)} + G2_{L(3)}\text{-}p = \begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix} = (\lambda_1+\lambda_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\lambda_1+\lambda_2)E = 16E \quad \text{----⑤}$$

$$G2_{L(3)}G2_{L(3)}\text{-}p = \begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2 \\ (\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} = -8E \quad \text{--⑥}$$

②の解と係数の関係から$\lambda_1+\lambda_2=16$, $\lambda_1\lambda_2=-8$であり、それを使った。

さらに、普通の対称行列は掛け算に関して一般に非可換だが、ゼータｎ分身を固有値として持つ特別な形の実-双対角対称行列は掛け算に関して可換となる。

よって⑥で行列の掛け算を逆にして行っても次の⑦の通り結果は同じになる。

$$G2_{L(3)}\text{-}pG2_{L(3)} = \begin{bmatrix} (\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2 \\ (\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} = -8E \quad \text{---⑦}$$

ゼータｎ分身を固有値として持つ行列が掛け算に関して可換となるのは、実-双対角対称行列の「右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称な実対称行列で且つ双方の対角線以外の成分が全て0」という特別な形に起因している。２分身の行列は0がないのでわかりにくいが、３分身以上でよりはっきりわかってくる。

じつは⑤、⑥から$G2_{L(3)}$ と$G2_{L(3)}$-pは、②と全く同じ形の(行列)方程式の解となっている。それは美しい関係性であるが、次のようになっている。

****

＜可換な$G2_{L(3)}$と$G2_{L(3)}$-pを解に持つ行列方程式＞

$G2_{L(3)}$ と$G2_{L(3)}$-pの固有値λ_1とλ_2は、代数(固有)方程式$x^2-16x-8=0$ ---②
の解である。解と係数の関係から、$\lambda_1+\lambda_2=16$, $\lambda_1\lambda_2=-8$である。

さて、$G2_{L(3)}$ と$G2_{L(3)}$-pを解にもつ行列方程式は次となる。

$$X^2-16X-8E=O \qquad \text{---⑧}$$

ここで、X,E,Oは2行2列の正方行列。Eは単位行列、Oは零行列。

$G2_{L(3)}$ と$G2_{L(3)}$-pは⑧の二つの解となっている。実際に$X=G2_{L(3)}$,$X=G2_{L(3)}$-pが⑧を満たしていることは容易に確認できる。⑧の解と係数の関係が（②のそれと類似的に）次のように成り立っている。

$G2_{L(3)}+G2_{L(3)}$-p＝16E,　$G2_{L(3)}G2_{L(3)}$-p(＝$G2_{L(3)}$-p$G2_{L(3)}$)＝-8E

****

上記の②と⑧が全く同じ形になるという完全性に注目いただきたい。とてもきれいである・・

最後に分かったことをまとめておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●L(3)２分身の値を固有値に持つ行列は一意には決まらず、２個存在する（$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p)。
さらに３分身の場合は３！個、４分身は4!個存在する。ただし、どの分身でも固有方程式は一つのみとなる。

●上記を一般化すると「ゼータｎ分身の値を固有値として持つ行列はｎ！個存在する（ただし、それぞれの分身に対応する固有方程式は一つのみ)」となると考えられる（予想）。

●実対称行列は一般に掛け算に関して非可換だが、ゼータｎ分身を固有値として持つ実-双対角対称行列は掛け算に関して可換である。２分身の場合を今回見たが、任意のｎ分身でも成立する。証明は後日示したい。

注記：実-双対角対称行列は、実対称行列の一種で、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つ双方の対角線以外の成分は全て０の行列である。

●L(3)２分身の値を固有値に持つ行列は二つ存在し、それを $G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p としよう。
$G2_{L(3)}$ と $G2_{L(3)}$-p は、行列の方程式 X^2 -16X -8E＝Ｏ ---⑧の解となる。
ここで、X,E,Ｏは２行２列の正方行列。Eは単位行列、Ｏは零行列。
⑧で解と係数の関係　$G2_{L(3)}$ +$G2_{L(3)}$-p＝16E, $G2_{L(3)}G2_{L(3)}$-p(＝$G2_{L(3)}$-p$G2_{L(3)}$)＝-8E　が成り立っている。

上記は、$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p に共通の代数(固有)方程式 x^2 -16x -8＝0 ----②と、その解（固有値） λ_1 と λ_2 における解と係数の関係（$\lambda_1+\lambda_2$＝16, $\lambda_1\lambda_2$＝-8）に完全に呼応している。

すなわち、⑧と②は、方程式の形と解と係数の関係において同じ形となっている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記の最後のものは、L(3)３分身ではどうなるのだろうか？

2019.11.30　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列を実-双対角対称行列に置き換えた。その関連の記述を変更。