<L(3)６分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞　rev1.01

今回は、L(3)の６分割（６分身）で次の予想が成り立っていることを見てみることにする。

[L(3)分割-実対称行列 予想]

L(3)n 分身の特殊値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)が存在する。そしてその行列は、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となる。

ここで、“L(3)n 分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を２回微分した次式に、m/(2n)を代入して得られるL(3)のn分割のn個の分身たちを指す。(nは１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n−1)

$1/(1^2-x^2)^3 +1/(3^2-x^2)^3 +1/(5^2-x^2)^3 +\cdots$

$=(\pi^3/(64x^3))\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) -(3\pi^2/(64x^4))/\cos^2(\pi x/2) +(3\pi/(32x^5))\tan(\pi x/2)$

L(3)は、L(s)の s＝3 の場合の次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$　　-----①

L(3)の６分身の値を固有値として持つエルミート行列を求めていくが、まずはその前準備としてL(3)の６分身を以下に示す。(その１２８)から抜粋。

＝＝＝

■L(3)６分割

$B1 = 1 -1/23^3 +1/25^3 -1/47^3 +1/49^3 -1/71^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$

$B2=1/3^3 -1/21^3 +1/27^3 -1/45^3 +1/51^3 -1/69^3 + \cdots=(\pi/24)^3\sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24)$

$B3=1/5^3 -1/19^3 +1/29^3 -1/43^3 +1/53^3 -1/67^3 + \cdots=(\pi/24)^3\sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24)$

$B4=1/7^3 -1/17^3 +1/31^3 -1/41^3 +1/55^3 -1/65^3 + \cdots=(\pi/24)^3\sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24)$

$B5=1/9^3 -1/15^3 +1/33^3 -1/39^3 +1/57^3 -1/63^3 + \cdots=(\pi/24)^3\sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24)$

$B6=1/11^3 -1/13^3 +1/35^3 -1/37^3 +1/59^3 -1/61^3 + \cdots=(\pi/24)^3\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)$

$B1 -B2 +B3 -B4 +B5 -B6=L(3)=\pi^3/32$ である。B1, −B2, B3, −B4, B5, −B6がL(3)の６分身である。

＝＝＝

(その１２８)でも見た通り、L(3)の６分身の値（右辺値から$(\pi/24)^3$を省いたもの）を解にもつ代数方程式は次の②（赤太字で表示）となる。他の分身のものも同時に並べた。

****

[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ代数方程式]

1分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x-2=0$

2分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$

3分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^3-54x^2-96x+32=0$

4分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^4-128x^3-544x^2+512x+128=0$

5分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$

6分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$ ---②

****

②は上記 B1, −B2, B3, −B4, B5, −B6 の右辺値から$(\pi/24)^3$を省いた六つの実解をもつが、それらをそれぞれλ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6とすると、次のようになる。

$\lambda_1=\ \sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$

$\lambda_2=-\sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24)$

$\lambda_3=\ \sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24)$

$\lambda_4=-\sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24)$

$\lambda_5=\ \sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24)$

$\lambda_6=-\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)$

さて、②の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するだろうか？ それは存在し次となる(G6 の 6 は 6 次を表す)。

$$G6_{L(3)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & \beta & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \beta & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

対称的できれいな形である。6分身もやはり右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となった。$\alpha,\beta,\gamma,a,b,c$は以下の通り。

$\alpha=(\lambda_1+\lambda_6)/2$, $\beta=(\lambda_2+\lambda_5)/2$, $\gamma=(\lambda_3+\lambda_4)/2$

$a=(\lambda_1-\lambda_6)/2$, $b=(-\lambda_2+\lambda_5)/2$, $c=(\lambda_3-\lambda_4)/2$

直接的に各分身の値λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6を用いて表現すると、次となる。

$$G6_{L(3)}=\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_6)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_6)/2 \\ 0 & (\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & (-\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3+\lambda_4)/2 & (\lambda_3-\lambda_4)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3-\lambda_4)/2 & (\lambda_3+\lambda_4)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & (\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 \\ (\lambda_1-\lambda_6)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_6)/2 \end{bmatrix}$$

$G6_{L(3)}$の固有方程式を求めると（非自明な固有ベクトルが存在する条件から求めると）、それは $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$ となり、②の代数方程式に一致する。六つの解の固有値は当然ながら上記の λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 に一致し、つまりL(3)６分身の値（特殊値）に一致する。

固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

●固有値 $\lambda_1=\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

●固有値 $\lambda_2=-\sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24)$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

●固有値 $\lambda_3=\sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24)$ に対応する固有ベクトル $p_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$

●固有値 $\lambda_4=-\sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24)$ に対応する固有ベクトル $p_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$

●固有値 $\lambda_5=\sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24)$ に対応する固有ベクトル $p_5=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

●固有値 $\lambda_6=-\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)$ に対応する固有ベクトル $p_6=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

固有ベクトルは互いに直交していることを確認いただきたい。これらの固有ベクトルはＬ(1)の６分身の場合と同じ(共通)であることにも注目したい。(その１０２)参照。

$$G6_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_6)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_6)/2\\ 0 & (\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & (-\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_3+\lambda_4)/2 & (\lambda_3-\lambda_4)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_3-\lambda_4)/2 & (\lambda_3+\lambda_4)/2 & 0 & 0\\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & (\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_6)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_6)/2\end{bmatrix}$$

左上から右下への対角成分を全て足すと 432 になる。
それは固有方程式 $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$ の二項目の 432 を表している（解と係数の関係。$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=432$）。

さらに、$G6_{L(3)}$は対称行列であるので、次のように固有ベクトル単位で分解的に表現できる。これを対称行列のスペクトル分解という。

＜$G6_{L(3)}$のスペクトル分解＞

$$G6_{L(3)}=\lambda_1 p_1 p_1{}'+\lambda_2 p_2 p_2{}'+\lambda_3 p_3 p_3{}'+\lambda_4 p_4 p_4{}'+\lambda_5 p_5 p_5{}'+\lambda_6 p_6 p_6{}' \quad \text{-----③}$$

ここで $p_1{}'$ は p_1 の転置ベクトル（横長）である。λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 は行列 $G6_{L(3)}$の固有値(分身の値)である。上式の成立は手計算で簡単に確認できる。
このように $G6_{L(3)}$が固有ベクトル単位で“分解的に”表現できた。

最後にもう一度眺めよう。

$$G6_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_6)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_6)/2\\ 0 & (\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & (-\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_3+\lambda_4)/2 & (\lambda_3-\lambda_4)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_3-\lambda_4)/2 & (\lambda_3+\lambda_4)/2 & 0 & 0\\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & (\lambda_2+\lambda_5)/2 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_6)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_6)/2\end{bmatrix}$$

この美しい形は、Ｌ(3)ゼータ分身を生み出す方程式の対称性の高さを“表現”していると考えられる。
すなわち $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$ の裏に潜む対称性を映し出している。

これまで行ってきた多くの計算から、ゼータのｎ分身を生み出すｎ次方程式は、べき根で解けるものになっているはずである。すなわち一連の方程式は可解であるに違いない。今後は、ガロア理論との関係も調べていく必要がある。

$$L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/11^3 + 1/13^3 - 1/15^3 + \cdots = \pi^3/32$$

ゼータ分割の研究から見えてきたことは、「単発的に見えるこの式は、フラクタル的に美しい構造＆装飾をもつ超巨大ピラミッドの頂点(先端)に位置するものである」ということである。

上式を眺めているだけでは、そんなことは全くわからない･･･

2019.11.17　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。