＜L(3) ５分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞　rev1.01

今回は、L(3)の５分割（５分身）で次の予想が成り立っていることを見てみることにする。

[L(3)分割-実対称行列 予想]

L(3)n 分身の特殊値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)が存在する。そしてその行列は、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となる。

ここで、“L(3)n 分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を２回微分した次式に、m/(2n)を代入して得られるL(3)のｎ分割のｎ個の分身たちを指す。(nは１以上の整数。m=1, 3, 5・・, 2n−1)

$1/(1^2-x^2)^3 +1/(3^2-x^2)^3 +1/(5^2-x^2)^3 +\cdots$

$=(\pi^3/(64x^3))\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) -(3\pi^2/(64x^4))/\cos^2(\pi x/2) +(3\pi/(32x^5))\tan(\pi x/2)$

L(3)は、L(s)のs=3の場合の次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$　　-----①

L(3)の５分身の値を固有値として持つエルミート行列を求めていくが、まずはその前準備として、L(3)の５分身を以下に示しておく。(その１２８)から抜粋。

＝＝＝

■L(3)５分割

$A1 = 1 -1/19^3 +1/21^3 -1/39^3 +1/41^3 -1/59^3 + \cdots =(\pi/20)^3\sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$

$A2=1/3^3 -1/17^3 +1/23^3 -1/37^3 +1/43^3 -1/57^3 + \cdots=(\pi/20)^3\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$

$A3=1/5^3 -1/15^3 +1/25^3 -1/35^3 +1/45^3 -1/55^3 + \cdots=(\pi/20)^3\sin(5\pi/20)/\cos^3(5\pi/20)$

$A4=1/7^3 -1/13^3 +1/27^3 -1/33^3 +1/47^3 -1/53^3 + \cdots=(\pi/20)^3\sin(3\pi/20)/\cos^3(3\pi/20)$

$A5=1/9^3 -1/11^3 +1/29^3 -1/31^3 +1/49^3 -1/51^3 + \cdots=(\pi/20)^3\sin(\pi/20)/\cos^3(\pi/20)$

$A1 -A2 +A3 -A4 +A5=L(3)=\pi^3/32$ である。A1, −A2, A3, −A4, A5 がL(3)の５分身である。

＝＝＝

(その１２８)でも見た通り、L(3)の５分身の値（右辺値から$(\pi/20)^3$を省いたもの）を解にもつ代数方程式は次の②（赤太字で表示）となる。他の分身のものも同時に並べた。

[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ代数方程式]

１分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x-2=0$

2分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$

3分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^3-54x^2-96x+32=0$

4分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^4-128x^3-544x^2+512x+128=0$

5分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$　　-----②

6分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$

すなわち、②はA1, -A2, A3, -A4, A5の値から$(\pi/20)^3$を省いた次の五つの実解をもつ。

$\sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$

$-\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$

$\sin(5\pi/20)/\cos^3(5\pi/20)$

$-\sin(3\pi/20)/\cos^3(3\pi/20)$

$\sin(\pi/20)/\cos^3(\pi/20)$

さて、②の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するだろうか？ それは存在し、②の解つまりL(3)５分身の値を固有値としてもつ実対称行列は次となる(G5の5は5次を表す)。

$$G5_{L(3)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & \beta & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \beta & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

対称的できれいな形である。

５分身もやはり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となった。α,β,γ,a,bは以下の通り。

$\alpha=(\lambda_1+\lambda_5)/2,\ \beta=(\lambda_2+\lambda_4)/2,\quad \gamma=\lambda_3$

$a=(\lambda_1-\lambda_5)/2\ ,\ b=(-\lambda_2+\lambda_4)/2$

ここで、λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5は次のようになり、５分身の各値そのものである。

$\lambda_1=\ \sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$

$\lambda_2=-\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$

$\lambda_3=\ \sin(5\pi/20)/\cos^3(5\pi/20)$

$\lambda_4=-\sin(3\pi/20)/\cos^3(3\pi/20)$

$\lambda_5=\ \sin(\pi/20)/\cos^3(\pi/20)$

$G5_{L(3)}$の固有方程式を求めると（非自明な固有ベクトルが存在する条件から求めると）、それは$x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$となり、②の代数方程式に一致する。その五つの解の固有値は当然ながら上記のλ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5に一致し、すなわちL(3)５分身の値（特殊値）に一致する。

固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

●固有値$\lambda_1=\sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

●固有値$\lambda_2=-\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

●固有値 λ_3＝sin(5π/20)/cos^3(5π/20)に対応する固有ベクトル　 $p_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

●固有値 λ_4＝-sin(3π/20)/cos^3(3π/20)に対応する固有ベクトル $p_4=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

●固有値 λ_5＝sin(π/20)/cos^3(π/20)に対応する固有ベクトル　 $p_5=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

固有ベクトルは互いに直交していることを確認いただきたい。これらの固有ベクトルはL(1)、ξ(2)の５分身の場合と全く同じ(共通)であることにも注目したい。(その１００)、(その１０１)参照。

$G5_{L(3)}$を固有値(分身の値) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 を使って表現すると、次となる。

$$G5_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_5)/2\\ 0 & (\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 & (-\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0\\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 & (\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_5)/2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_5)/2\end{bmatrix}$$

λ_3＝(λ_3 +λ_3)/2 であることから、上記は次のように完全に統一的な形でも表現できる。

$$G5_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_5)/2\\ 0 & (\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 & (-\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_3+\lambda_3)/2 & 0 & 0\\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 & (\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_5)/2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_5)/2\end{bmatrix}$$

左上から右下への対角成分を全て足すと 250 になる。
それは固有方程式 $x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$ の二項目の 250 を表している（解と係数の関係。$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=250$)。

さらに、$G5_{L(3)}$は対称行列であるので、次のように固有ベクトル単位で分解的に表現できる。これを対称行列のスペクトル分解という。

＜$G5_{L(3)}$のスペクトル分解＞

$$G5_{L(3)} = \lambda_1 p_1\ p_1' + \lambda_2 p_2\ p_2' + \lambda_3 p_3\ p_3' + \lambda_4 p_4\ p_4' + \lambda_5 p_5\ p_5 \qquad \text{-----③}$$

ここで p_1' は p_1 の転置ベクトル（横長）である。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$は行列 $G5_{L(3)}$の固有値(分身の値)である。上式の成立は手計算で簡単に確認できる。

このように $G5_{L(3)}$が固有ベクトル単位で“分解的に”表現できた。

最後にもう一度眺めよう。

$$G5_{L(3)} = \begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_5)/2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_5)/2 \\ 0 & (\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 & (-\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3+\lambda_3)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 & (\lambda_2+\lambda_4)/2 & 0 \\ (\lambda_1-\lambda_5)/2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_5)/2 \end{bmatrix}$$

この美しい形は、L(3)ゼータ分身を生み出す方程式の対称性の高さを“表現”していると考えられる。
すなわち $x^5 - 250x^4 - 2080x^3 + 4000x^2 + 2560x - 512 = 0$ の裏に潜む対称性を映し出している。

次回は、L(3) ６分身を見たい。

2019.11.13　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。