＜L(3)４分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞ rev1.01

今回は、L(3)の４分割（４分身）でも次の予想が成り立っていることを見てみることにする。

[L(3)分割-実対称行列 予想]

L(3)n 分身の特殊値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)が存在する。そしてその行列は、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となる。

ここで、“L(3)n 分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を２回微分した次式に、m/(2n)を代入して得られるL(3)のn分割のn個の分身たちを指す。(nは1以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n−1)

$1/(1^2-x^2)^3 +1/(3^2-x^2)^3 +1/(5^2-x^2)^3 +\cdots$

$=(\pi^3/(64x^3))\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) -(3\pi^2/(64x^4))/\cos^2(\pi x/2) +(3\pi/(32x^5))\tan(\pi x/2)$

L(3)は、L(s)のs＝3の場合の次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$ ------①

L(3)の４分身の値を固有値として持つエルミート行列を求めていくが、まずはその前準備として、L(3)の４分身を以下に示しておく。(その１２７)から抜粋。

＝＝

■L(3)４分割

$B1= 1 -1/15^3 +1/17^3 -1/31^3 +1/33^3 -1/47^3 +\cdots =(\pi/16)^3\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$

$B2=1/3^3 -1/13^3 +1/19^3 -1/29^3 +1/35^3 -1/45^3 +\cdots=(\pi/16)^3\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$

$B3=1/5^3 -1/11^3 +1/21^3 -1/27^3 +1/37^3 -1/43^3 +\cdots=(\pi/16)^3\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$

$B4=1/7^3 -1/9^3 +1/23^3 -1/25^3 +1/39^3 -1/41^3 +\cdots =(\pi/16)^3\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

$B1 -B2 +B3 -B4=L(3)=\pi^3/32$ である。B1, −B2, B3, −B4がL(3)の４分身である。

$(\pi/16)^3$を除いた右辺値の具体的な値は、次の通りである。

$B1\Rightarrow \sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)= 32 +24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$B2\Rightarrow \sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)=-32 +24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$B3\Rightarrow \sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)= 32 -24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$B4\Rightarrow \sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16) =-32 -24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$B1 -B2 +B3 -B4=L(3)=\pi^3/32$の計算で、√が全てきれいに消えていく様を味わっていただきたい。

ゼータの値は、みな見事な対称性に満ちているのである！

＝＝

(その１２７)でも見た通り、L(3)の４分身の値（右辺値から$(\pi/16)^3$を省いたもの）を解にもつ代数方程式は次となる。

[L(3)の分身の値を解にもつ代数方程式]

４分身を解にもつ代数方程式⇒ $x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$ -----②

すなわち、②はB1, -B2, B3, -B4の値から$(\pi/16)^3$を省いた次の<u>四つの実解</u>をもつ。

$\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$

$-\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$

$\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$

$-\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

さて、<u>②の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するだろうか</u>？ それは存在し、②の解つまりL(3)４分身の値を固有値としてもつ実対称行列は次となる(G4の４は４次を表す)。

$$G4_{L(3)}=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

美しい形である！ L(3)もL(1)、$\xi(2)$と同様、<u>右下方向と左下方向の双方の対角線に対して対称</u>となっている。

α,β,a,bは以下の通り。

$\alpha=32+24\sqrt{2}$, $\beta=16\sqrt{(2+\sqrt{2})}+14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$a=32-24\sqrt{2}$, $b=-16\sqrt{(2-\sqrt{2})}+14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$G4_{L(3)}$の対角成分は<u>分身たちの基本パーツ（α, β, a, b）</u>になっている。実際、分身B1, -B2, B3, -B4では

$B1=(\pi/16)^3(\alpha+\beta)$

$-B2=(\pi/16)^3(a-b)$

$B3=(\pi/16)^3(a+b)$

$-B4=(\pi/16)^3(\alpha-\beta)$

となっているので、対角成分はまさに分身の基本パーツである。この行列では、対角成分以外はすべてゼロであることにも着目したい。

$G4_{L(3)}$の固有方程式は$x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$であり、上方の②の代数方程式に一致する。その四つの解の固有値λ_1, λ_2, λ_3, λ_4は当然ながらL(3)４分身の値（特殊値）に一致する。

固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

●固有値$\lambda_1=\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)=\alpha+\beta$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

●固有値$\lambda_2=-\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)=a-b$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix}0\\ 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$

●固有値λ_3=sin(3π/16)/cos^3(3π/16)=a+bに対応する固有ベクトル　$p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

●固有値λ_4=-sin(π/16)/cos^3(π/16)　=$\alpha-\beta$　に対応する固有ベクトル $p_4 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有ベクトルは互いに直交していることを確認いただきたい。これらの固有ベクトルはL(1)、ξ(2)の場合と全く同じ(共通)であることにも注目したい。(その９７)、(その９９)参照。

$G4_{L(3)}$を固有値(分身の値)$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$を使って表現すると、次となる。

$$G4_{L(3)}=\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_4)/2 & 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_4)/2 \\ 0 & (\lambda_2+\lambda_3)/2 & (-\lambda_2+\lambda_3)/2 & 0 \\ 0 & (-\lambda_2+\lambda_3)/2 & (\lambda_2+\lambda_3)/2 & 0 \\ (\lambda_1-\lambda_4)/2 & 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_4)/2 \end{bmatrix}$$

この行列の構造はじつは(その９７)のL(1)、また(その９９)のZ(2)の行列と同じ構造となっている。L(1)、ξ(2)、L(3)でエルミート行列の構造が同じ(共通)であることは非常に興味深い。

$G4_{L(3)}$の成分を具体的数値で示すと、次となる。

$$G4_{L(3)}=$$

$$\begin{bmatrix} 32+24\sqrt{2} & 0 & 0 & 16\sqrt{(2+\sqrt{2})}+14\sqrt{(4+2\sqrt{2})} \\ 0 & 32-24\sqrt{2} & -16\sqrt{(2-\sqrt{2})}+14\sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 0 \\ 0 & -16\sqrt{(2-\sqrt{2})}+14\sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 32-24\sqrt{2} & 0 \\ 16\sqrt{(2+\sqrt{2})}+14\sqrt{(4+2\sqrt{2})} & 0 & 0 & 32+24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

左上から右下への対角成分を全て足すと128になる。それは固有方程式$x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$の二項目の128を表している(解と係数の関係。$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=128$)。

さらに、$G4_{L(3)}$は対称行列であるので、次のように固有ベクトル単位で分解的に表現できる。これを対称行列のスペクトル分解という。

<$G4_{L(3)}$のスペクトル分解>

$$G4_{L(3)} = \lambda_1 p_1\ p_1{}' + \lambda_2 p_2\ p_2{}' + \lambda_3 p_3\ p_3{}' + \lambda_4 p_4\ p_4{}' \qquad \text{-----③}$$

ここで$p_1{}'$はp_1の転置ベクトル(横長)である。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$は行列$G4_{L(3)}$の固有値(分身の値)である。上式の成立は手計算で簡単に確認できる。

$G4_{L(3)}$が固有ベクトル単位で“分解的に”表現できた。スペクトル分解は有限次のフーリエ展開のようなものと言える。各固有ベクトルが固有値を介して各分身に対応していることに注意いただきたい（例えば p_1 は $\lambda_1 = \alpha + \beta$ を介して分身 B1 に対応）。

③のスペクトル分解で注目すべきはL(1)、ξ(2)、L(3)で固有ベクトルが同じ(共通)であることである。それによって③式に対し、それぞれのゼータの分身の値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を代入するだけで、そのゼータのエルミート行列（実対称行列）を機械的に構成できるのである。(分身の値は、冒頭の部分分数展開式から簡単に入手できる)。この簡単さ、簡明さ！ ゼータの分身(分割)を表現した行列は、このような驚くべき構造となっている。

最後に一言。

$$G4_{L(3)} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

行列のこの美しい形は、L(3)ゼータ分身を生み出す方程式の対称性の高さを“表現”していると考えられる。

方程式 $x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128 = 0$ をいくら眺めても対称性は見えないのだが・・。

次回は、L(3)５分身を見たい。

2019.11.2　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。