＜L(3)２分身，３分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞　rev1.01

（その９６）～（その１１４）でL(1)やζ(2)に対し行ったことの類似をL(3)に対して行ないたい。
すなわち、ここではL(3)の分身たちの特殊値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）を求める。

その前に、訂正がある。
これまで「中心対称行列」という言葉を多く使ってきた。中心対称行列とは、行列の左上から右下への対角線に対してのみならず右上から左下への対角線に対しても成分が対称的に並んでいるものを言う。」---(1)と説明してきた。しかし、この説明は誤りであるとわかった。
https://en.wikipedia.org/wiki/Centrosymmetric_matrix
このwikipediaから、中心対称行列 Centrosymmetric matrix は、行列の中心点（真ん中）に対して成分が対称的に並んでいるものを言い（対称行列でない！）、上記(1)の説明は間違いとわかる。
ここに訂正し、これまで使ってきた”中心対称行列”という言葉を（その９６）以降で削除しその関連の説明の変更を行った(rev1.01)ことを報告します。大勢に影響はない。

ただし面白いことに、ゼータ分身の行列は、対角成分以外は全部ゼロなので偶然に中心対称行列になっているのである。であるから、“中心対称行列”を使い続けることも可能ではある。しかし普通の中心対称行列は上記wikipediaの通り、対称行列ではないので、実対称行列を強調する本研究で使うと混乱を招く恐れがある。よって今後は、“中心対称行列”は使用しない方針で行く。

明示的なゼータ特殊値の分身の値を固有値として持つ行列は、これまで見てきたように、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となる実対称行列で、且つ双方の対角線以外の成分は全て0となる行列である。

しかしこの説明は長ったらしいので、簡潔な名前で表現したい。数学の世界でないか調べたが、見つからなかった。どこかに存在する可能性もあるが、とりあえず、**実-双対角対称行列**と命名する。

つまり、実-双対角対称行列は「実対称行列の一種で、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つ双方の対角線以外の成分は全て0となる行列」である。「右下方向と左下方向の（双方の）対角線に対し対称である（双方向の対角行列の合体のニュアンスも含む)」ので、こう命名した。

具体的には、例えば、４次と５次では次のようなものが、実-双対角対称行列である。とてつもなく美しい形である。

$$G4=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\qquad G5=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

今後、“実-双対角対称行列”を用いていくが、同時に“実対称行列”や“エルミート行列”も使っていく。

さて、本題に戻る。

本論考の結論の概要を先に述べると、L(3)分身たちの特殊値を固有値として持つエルミート行列（実対称行列）が存在し、その行列は右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となる。その固有ベクトルはL(1)、ξ(2)のそれと一致し、その行列もL(1)、ξ(2)の場合と同じ構造となる。厳密には予想であるが、ぜったい正しいと確信できる予想である。

イメージでいえば、美しい構造の洞窟がどこまでも続いている感じである

今回は、L(3)の２分割（２分身）と３分割（３分身）のエルミート行列を求める。L(1),ξ(2)のケースと同様、次の予想の正しさを一つ一つ確認していく形でエルミート行列を求めていく。

[L(3)分割-実対称行列 予想]

L(3)n分身の特殊値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)が存在する。そしてその行列は、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つ双方の対角線の成分以外は全部0となる。

ここで、“L(3)n分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を２回微分した次式に、m/(2n)を代入して得られるL(3)のn分割のn個の分身たちを指す。(nは1以上の整数。m=1, 3, 5・・, 2n-1)

$1/(1^2-x^2)^3 + 1/(3^2-x^2)^3 + 1/(5^2-x^2)^3 + \cdots$

$= (\pi^3/(64x^3))\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) - (3\pi^2/(64x^4))/\cos^2(\pi x/2) + (3\pi/(32x^5))\tan(\pi x/2)$

さて、L(3)は、L(s)のs=3の場合の次のものである。

$L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/11^3 + 1/13^3 - 1/15^3 + \cdots = \pi^3/32$　　-----①

L(3)の２分身、３分身の値を固有値として持つエルミート行列を求めていくが、まずはその前準備として、L(3)の２分身と３分身を以下に示しておく。(その１２５)、(その１２７）から抜粋。

======================================

■L(3)２分割

$A1 = 1 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/15^3 + 1/17^3 - 1/23^3 + \cdots = (\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

$A2 = 1/3^3 - 1/5^3 + 1/11^3 - 1/13^3 + 1/19^3 - 1/21^3 + \cdots = (\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

A1 -A2=L(3)=$\pi^3/32$ である。A1, -A2がL(3)の２分身である。右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8) = 8 + 6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8) = -8 + 6\sqrt{2}$

■L(3)３分割

B1＝ $1 -1/11^3 +1/13^3 -1/23^3 +1/25^3 -1/35^3 + \cdots = (\pi/12)^3 \sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$

B2＝$1/3^3 -1/9^3 +1/15^3 -1/21^3 +1/27^3 -1/33^3 + \cdots = (\pi/12)^3 \sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)$

B3＝$1/5^3 -1/7^3 +1/17^3 -1/19^3 +1/29^3 -1/31^3 + \cdots = (\pi/12)^3 \sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12)$

B1 -B2 +B3＝L(3)＝$\pi^3/32$ である。B1, -B2, B3 がL(3)の３分身である。

右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12) = 28 +16\sqrt{3}$

$\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12) = 2$

$\sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12) = 28 -16\sqrt{3}$

＝＝＝

(その１２７)でも見た通り、L(3)の２分身、３分身の値（右辺値から$(\pi/8)^3$、$(\pi/12)^3$を省いたもの）を解にもつ代数方程式は次となる。

[L(3)の分身の値を解にもつ代数方程式（固有方程式）]

２分身を解にもつ代数方程式⇒ $x^2 -16x -8=0$ ------②

３分身を解にもつ代数方程式⇒ $x^3 -54x^2 -96x +32=0$ ----③

例えば②はA1, -A2の値から$(\pi/8)^3$を省いた、$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$と$-\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$の二つを解にもつ。

さて、最大の興味は②、③の代数方程式の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するか？ということである。それは存在し、以下の通りとなる。

まずL(3)２分身の値を固有値としてもつ実対称行列は、次となる(G2の2は2次を表す)。

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix} 8 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}$$

L(1)、ξ(2)の場合と同様、L(3)の$G2_{L(3)}$ も、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となった。

上記の行列の固有方程式は、$x^2 -16x -8=0$であり上記の②の代数方程式に一致する。その解の二つの固有値λ_1, λ_2は当然ながらL(3)２分身の値（特殊値）に一致する。固有値とその固有ベクトルを以下に示す。

固有値λ_1＝ $\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8) = 8 +6\sqrt{2}$に対応する固有ベクトル$p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値λ_2＝ $-\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8) = 8 -6\sqrt{2}$に対応する固有ベクトル$p_2=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有ベクトルp_1, p_2は互いに直交していることを確認いただきたい。固有ベクトルは規格化されている。

これらの固有ベクトルはL(1)、ξ(2)の場合と全く同じものになっている！

二つの固有値λ_1, λ_2を使ってG2を表現すると、次のようになる。

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix} 8 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \end{bmatrix}$$

この固有値を使った表現は、じつはL(1)、ξ(2)と同じになっている。L(1)、ξ(2)、L(3)のエルミート行列が全く同じ構造であることは興味深い！

なお上記行列の左上から右下への対角線の数をすべて足すと16になるが、これは固有方程式$x^2-16x-8=0$の二項目の16を表している（解と係数の関係）。

次にL(3)３分身の値を固有値としてもつ３次実対称行列$G3_{L(3)}$を示す(G3の3は3次を表す)。
次のものである。

$$G3_{L(3)}=\begin{bmatrix} 28 & 0 & 16\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ 16\sqrt{3} & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

L(1)、ξ(2)の場合と同様、L(3)の$G3_{L(3)}$ も、右下方向と左下方向のそれぞれの（双方の）対角線に対して対称となっている（そして双方の対角線以外の成分はゼロ）。

$G3_{L(3)}$の固有方程式は$x^3-54x^2-96x+32=0$であり上方の③の代数方程式に一致する。その解の三つの固有値λ_1, λ_2, λ_3は当然ながらL(3)３分身の値（特殊値）に一致する。固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

固有値$\lambda_1= \sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)=28+16\sqrt{3}$に対応する固有ベクトル$p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値$\lambda_2= -\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)=-2$に対応する固有ベクトル　　$p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値$\lambda_3= \sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12)=28-16\sqrt{3}$に対応する固有ベクトル　$p_3=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有ベクトルp_1, p_2, p_3は互いに直交していることを確かめていただきたい。
これらの固有ベクトルはL(1)、ξ(2)の場合と全く同じものであることにも着目したい。

さらに三つの固有値λ_1, λ_2, λ_3を使ってG3を表現すると、次となる。

$$
G3_{L(3)} = \begin{bmatrix} 28 & 0 & 16\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ 16\sqrt{3} & 0 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_3)/2 & 0 & (\lambda_1-\lambda_3)/2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ (\lambda_1-\lambda_3)/2 & 0 & (\lambda_1+\lambda_3)/2 \end{bmatrix}
$$

固有値を用いたこの表現は、じつはＬ(1)、ξ(2)と同じになっている。エルミート行列がＬ(1)、ξ(2)、Ｌ(3)で全く同じ構造であることは面白い。

上記行列の右下方向への対角線の数を全て足すと 54 になるが、これは固有方程式 $x^3 -54x^2 -96x +32=0$ の二項目の 54 を表している（解と係数の関係）。

今回このようにして、Ｌ(3)２分身、３分身の値を固有値にもつ実対称行列（エルミート行列）を求めることができた。

結局わかったことは、Ｌ(3)分身たちのエルミート行列周辺の構造は、固有値の具体的数値以外は、どれもＬ(1)、ξ(2)のそれと全く同じである！ということである。

「明示的なゼータ特殊値から生まれる分身たちは、乱れの無いきれいな秩序の中に棲んでいる」と言えそうである。では、なぜこんなにきれいな世界ができているのか？ それは、明示的なゼータ特殊値が自明な零点から生み出されているからである。零点領域はきれいなのである。零点の調和が分身たちすべてに及ぶ。それは明示的な特殊値（例えばξ(s)ならξ(2),ξ(4),ξ(6)・・など）という狭いところにだけ実現される究極の美である。他の大部分の領域は、乱れた嵐の様相となる。

Ｌ(3)４分身は、次回以降見ていきたい。

以上。

2019.10.26　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列を実-双対角対称行列に置き換えた。その関連の記述を追加・変更。