＜ L(3) １１分割、１２分割 ＞

L(3)の１１分割、１２分割を求めたので報告したい。

L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので、次のものである。

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32$ -----①

では、まず結果を示す。以下の通りである。

＝＝

■L(3)１１分割

$A1=1-1/43^3+1/45^3-1/87^3+1/89^3-1/131^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(21\pi/44)/\cos^3(21\pi/44)$

$A2=1/3^3-1/41^3+1/47^3-1/85^3+1/91^3-1/129^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(19\pi/44)/\cos^3(19\pi/44)$

$A3=1/5^3-1/39^3+1/49^3-1/83^3+1/93^3-1/127^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(17\pi/44)/\cos^3(17\pi/44)$

$A4=1/7^3-1/37^3+1/51^3-1/81^3+1/95^3-1/125^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(15\pi/44)/\cos^3(15\pi/44)$

$A5=1/9^3-1/35^3+1/53^3-1/79^3+1/97^3-1/123^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(13\pi/44)/\cos^3(13\pi/44)$

$A6=1/11^3-1/33^3+1/55^3-1/77^3+1/99^3-1/121^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(11\pi/44)/\cos^3(11\pi/44)$

$A7=1/13^3-1/31^3+1/57^3-1/75^3+1/101^3-1/119^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(9\pi/44)/\cos^3(9\pi/44)$

$A8=1/15^3-1/29^3+1/59^3-1/73^3+1/103^3-1/117^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(7\pi/44)/\cos^3(7\pi/44)$

$A9=1/17^3-1/27^3+1/61^3-1/71^3+1/105^3-1/115^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(5\pi/44)/\cos^3(5\pi/44)$

$A10=1/19^3-1/25^3+1/63^3-1/69^3+1/107^3-1/113^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(3\pi/44)/\cos^3(3\pi/44)$

$A11=1/21^3-1/23^3+1/65^3-1/67^3+1/109^3-1/111^3+\cdots=(\pi/44)^3\sin(\pi/44)/\cos^3(\pi/44)$

$A1-A2+A3-A4+A5-A6+A7-A8+A9-A10+A11=L(3)=\pi^3/32$ である。

<u>A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6,A7,-A8,A9,-A10,A11 がL(3)の１１分身である</u>。

念のため、上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺値と右辺値は一致した。

■L(3)１２分割

$B1=1-1/47^3+1/49^3-1/95^3+1/97^3-1/143^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(23\pi/48)/\cos^3(23\pi/48)$

$B2=1/3^3-1/45^3+1/51^3-1/93^3+1/99^3-1/141^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(21\pi/48)/\cos^3(21\pi/48)$

$B3=1/5^3-1/43^3+1/53^3-1/91^3+1/101^3-1/139^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(19\pi/48)/\cos^3(19\pi/48)$

$B4=1/7^3-1/41^3+1/55^3-1/89^3+1/103^3-1/137^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(17\pi/48)/\cos^3(17\pi/48)$

$B5=1/9^3-1/39^3+1/57^3-1/87^3+1/105^3-1/135^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(15\pi/48)/\cos^3(15\pi/48)$

$B6=1/11^3-1/37^3+1/59^3-1/85^3+1/107^3-1/133^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(13\pi/48)/\cos^3(13\pi/48)$

$B7=1/13^3-1/35^3+1/61^3-1/83^3+1/109^3-1/131^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(11\pi/48)/\cos^3(11\pi/48)$

$B8=1/15^3-1/33^3+1/63^3-1/81^3+1/111^3-1/129^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(9\pi/48)/\cos^3(9\pi/48)$

$B9=1/17^3-1/31^3+1/65^3-1/79^3+1/113^3-1/127^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(7\pi/48)/\cos^3(7\pi/48)$

$B10=1/19^3-1/29^3+1/67^3-1/77^3+1/115^3-1/125^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(5\pi/48)/\cos^3(5\pi/48)$

$B11=1/21^3-1/27^3+1/69^3-1/75^3+1/117^3-1/123^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(3\pi/48)/\cos^3(3\pi/48)$

$B12=1/23^3-1/25^3+1/71^3-1/73^3+1/119^3-1/121^3+\cdots=(\pi/48)^3\sin(\pi/48)/\cos^3(\pi/48)$

$B1\ -B2\ +B3\ -B4\ +B5\ -B6\ +B7\ -B8\ +B9\ -B10\ +B11\ -B12=L(3)=\pi^3/32$ である。
$B1,-B2,B3,-B4,B5,-B6,B7,-B8,B9,-B10,B11,-B12$ がL(3)の１２分身である。
上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺値と右辺値は一致した。

＝＝＝

＝＝＝

上の分割級数(分身)の導出過程を簡単に述べる。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^3\ +1/(3^2-x^2)^3\ +1/(5^2-x^2)^3\ +\cdot\cdot=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)\ +\ \mathrm{Others}(x)$ ---②

ここで右辺の Others(x)はL(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とL(1)に関係)、”Others(x)”とした。ここで Others(x)は次の通り。

$\mathrm{Others}(x)=\ -(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)\ +(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ²の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がL(1)に関係している。

上記②の x に特定の値を代入することで、L(3)の分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

②の x に{22-(2n-1)}/22 を代入すると、An が得られる。ここで、n は 1 から 11 の整数。
例えば n=3 として②の x に 17/22 を代入すると、A3 が得られる。

②の x に{24-(2n-1)}/24 を代入すると、Bn が得られる。ここで、n は 1 から 12 の整数。
例えば n=3 として②の x に 19/24 を代入すると、B3 が得られる。

（注記）②の左辺級数からL(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のL(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にL(3)の分割級数（分身）を求めることができる。
＝＝＝

このようにL(3)の１１分身、１２分身が求まった。

このL(3)１１分身、１２分身は、L(1)１１分身、１２分身とその形が全く同じであることに注目いただきたい。⇒L(1)１１分身は（その１０７)、L(1)１２分身は（その２２）を参照。

L(3)１１分身の A6 は、じつはL(3)そのものになっていることを指摘しておく。面白いことであるが、これはL(1)での類似でもある。

　Ｌ（１）での（その１０７）、（その２２）の考察は、類似で L(3)でもそのまま当てはまることを指摘しておきたい。L(1)からL(3)に移っても全く秩序が壊れないという、ゼータの保存性のよさを味わっていただきたい。

2019.10.19　杉岡幹生