＜ L(3) ９分割、１０分割 ＞

L(3)の９分割、１０分割を求めたので報告したい。

L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので、次のものである。

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32$ -----①

では、まず結果を示す。以下の通りである。

==

■L(3) ９分割

$A1=1-1/35^3+1/37^3-1/71^3+1/73^3-1/107^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(17\pi/36)/\cos^3(17\pi/36)$

$A2=1/3^3-1/33^3+1/39^3-1/69^3+1/75^3-1/105^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(15\pi/36)/\cos^3(15\pi/36)$

$A3=1/5^3-1/31^3+1/41^3-1/67^3+1/77^3-1/103^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(13\pi/36)/\cos^3(13\pi/36)$

$A4=1/7^3-1/29^3+1/43^3-1/65^3+1/79^3-1/101^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(11\pi/36)/\cos^3(11\pi/36)$

$A5=1/9^3-1/27^3+1/45^3-1/63^3+1/81^3-1/99^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(9\pi/36)/\cos^3(9\pi/36)$

$A6=1/11^3-1/25^3+1/47^3-1/61^3+1/83^3-1/97^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(7\pi/36)/\cos^3(7\pi/36)$

$A7=1/13^3-1/23^3+1/49^3-1/59^3+1/85^3-1/95^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(5\pi/36)/\cos^3(5\pi/36)$

$A8=1/15^3-1/21^3+1/51^3-1/57^3+1/87^3-1/93^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(3\pi/36)/\cos^3(3\pi/36)$

$A9=1/17^3-1/19^3+1/53^3-1/55^3+1/89^3-1/91^3+\cdots=(\pi/36)^3\sin(\pi/36)/\cos^3(\pi/36)$

$A1-A2+A3-A4+A5-A6+A7-A8+A9=L(3)=\pi^3/32$ である。A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6,A7,-A8,A9 が L(3)の９分身である。
念のため、上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺値と右辺値は一致した。

■L(3) １０分割

$B1=1-1/39^3+1/41^3-1/79^3+1/81^3-1/119^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(19\pi/40)/\cos^3(19\pi/40)$

$B2=1/3^3-1/37^3+1/43^3-1/77^3+1/83^3-1/117^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(17\pi/40)/\cos^3(17\pi/40)$

$B3=1/5^3-1/35^3+1/45^3-1/75^3+1/85^3-1/115^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(15\pi/40)/\cos^3(15\pi/40)$

$B4=1/7^3-1/33^3+1/47^3-1/73^3+1/87^3-1/113^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(13\pi/40)/\cos^3(13\pi/40)$

$B5=1/9^3-1/31^3+1/49^3-1/71^3+1/89^3-1/111^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(11\pi/40)/\cos^3(11\pi/40)$

$B6=1/11^3-1/29^3+1/51^3-1/69^3+1/91^3-1/109^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(9\pi/40)/\cos^3(9\pi/40)$

$B7=1/13^3-1/27^3+1/53^3-1/67^3+1/93^3-1/107^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(7\pi/40)/\cos^3(7\pi/40)$

$B8=1/15^3-1/25^3+1/55^3-1/65^3+1/95^3-1/105^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(5\pi/40)/\cos^3(5\pi/40)$

$B9=1/17^3-1/23^3+1/57^3-1/63^3+1/97^3-1/103^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(3\pi/40)/\cos^3(3\pi/40)$

$B10=1/19^3-1/21^3+1/59^3-1/61^3+1/99^3-1/101^3+\cdots=(\pi/40)^3\sin(\pi/40)/\cos^3(\pi/40)$

$B1-B2+B3-B4+B5-B6+B7-B8+B9-B10=L(3)=\pi^3/32$ である。B1,-B2,B3,-B4,B5,-B6,B7,-B8,B9,-B10 が L(3)の１０分身である。上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺値と右辺値は一致した。

==

＝＝＝

上の分割級数(分身)の導出過程を簡単に述べる。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^3+1/(3^2-x^2)^3+1/(5^2-x^2)^3+\cdots=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x)$ ---②

ここで右辺の Others(x)はＬ(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とＬ(1)に関係)、”Others(x)”とした。ここで Others(x)は次の通り。

$\mathrm{Others}(x)=-(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)+(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がＬ(1)に関係している。

上記②のｘに特定の値を代入することで、Ｌ(3)の分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

②のｘに(18+1-2n)/18 を代入すると、An が得られる。ここで、n は 1 から 9 の整数。
例えば n＝3 として②のｘに 13/18 を代入すると、A3 が得られる。

②のｘに(20+1-2n)/20 を代入すると、Bn が得られる。ここで、n は 1 から 10 の整数。
例えば n＝3 として②のｘに 15/20 を代入すると、B3 が得られる。

（注記）②の左辺級数からＬ(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のＬ(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にＬ(3)の分割級数（分身）を求めることができる。

＝＝＝

このようにＬ(3)の９分身、１０分身が求まった。

このＬ(3)９分身、１０分身は、Ｌ(1)９分身、１０分身とその形が全く同じであることに注目いただきたい。
⇒Ｌ(1)９分身は（その３０）、Ｌ(1)１０分身は（その２１）を参照。

2019.10.12　杉岡幹生