＜ L(3) ７分割、８分割 ＞

L(3)の７分割、８分割を求めたので報告したい。

L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので、次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$ ―――①

では、まず結果を示す。

＝＝＝

■L(3) ７分割

$A1 = 1 -1/27^3 +1/29^3 -1/55^3 +1/57^3 -1/83^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(13\pi/28)/\cos^3(13\pi/28)$

$A2=1/3^3 -1/25^3 +1/31^3 -1/53^3 +1/59^3-1/81^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(11\pi/28)/\cos^3(11\pi/28)$

$A3=1/5^3 -1/23^3 +1/33^3 -1/51^3 +1/61^3-1/79^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(9\pi/28)/\cos^3(9\pi/28)$

$A4=1/7^3 -1/21^3 +1/35^3 -1/49^3 +1/63^3-1/77^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(7\pi/28)/\cos^3(7\pi/28)$

$A5=1/9^3 -1/19^3 +1/37^3 -1/47^3 +1/65^3-1/75^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(5\pi/28)/\cos^3(5\pi/28)$

$A6=1/11^3 -1/17^3 +1/39^3 -1/45^3 +1/67^3-1/73^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(3\pi/28)/\cos^3(3\pi/28)$

$A7=1/13^3 -1/15^3 +1/41^3 -1/43^3 +1/69^3-1/71^3 + \cdots =(\pi/28)^3\sin(\pi/28)/\cos^3(\pi/28)$

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7＝L(3)＝$\pi^3/32$ である。<u>A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6,A7 が L(3)の７分身である</u>。念のため、上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

■L(3) ８分割

$B1 = 1 -1/31^3 +1/33^3 -1/63^3 +1/65^3 -1/95^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(15\pi/32)/\cos^3(15\pi/32)$

$B2=1/3^3 -1/29^3 +1/35^3 -1/61^3 +1/67^3 -1/93^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(13\pi/32)/\cos^3(13\pi/32)$

$B3=1/5^3 -1/27^3 +1/37^3 -1/59^3 +1/69^3 -1/91^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(11\pi/32)/\cos^3(11\pi/32)$

$B4=1/7^3 -1/25^3 +1/39^3 -1/57^3 +1/71^3 -1/89^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(9\pi/32)/\cos^3(9\pi/32)$

$B5=1/9^3 -1/23^3 +1/41^3 -1/55^3 +1/73^3 -1/87^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(7\pi/32)/\cos^3(7\pi/32)$

$B6=1/11^3 -1/21^3 +1/43^3 -1/53^3 +1/75^3 -1/85^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(5\pi/32)/\cos^3(5\pi/32)$

$B7=1/13^3 -1/19^3 +1/45^3 -1/51^3 +1/77^3 -1/83^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(3\pi/32)/\cos^3(3\pi/32)$

$B8=1/15^3 -1/17^3 +1/47^3 -1/49^3 +1/79^3 -1/81^3 + \cdots =(\pi/32)^3\sin(\pi/32)/\cos^3(\pi/32)$

B1 -B2 +B3 -B4 +B5 -B6 +B7 -B8＝L(3)＝$\pi^3/32$ である。<u>B1,-B2,B3,-B4,B5,-B6,B7,-B8 が L(3)の８分身である</u>。上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

＝＝＝

＝＝＝

上の分割級数(分身)の導出過程を簡単に述べる。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2) +1/(3^2-x^2) +1/(5^2-x^2) +\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^3 +1/(3^2-x^2)^3 +1/(5^2-x^2)^3 +\cdots=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) + \mathrm{Others}(x)$ ――②

ここで右辺の Others(x)はＬ(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とＬ(1)に関係)、”Others(x)”とした。ここで Others(x)は次の通り。

$$\mathrm{Others}(x) = -(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2) + (3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$$

注記：Others(x)のはじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がＬ(1)に関係している。

上記②の x に特定の値を代入することで、Ｌ(3)の分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

②の x に値 13/14 を代入すると、A1 が得られる。
②の x に値 11/14 を代入すると、A2 が得られる。
②の x に値 9/14 を代入すると、 A3 が得られる。
②の x に値 7/14 を代入すると、 A4 が得られる。
②の x に値 5/14 を代入すると、 A5 が得られる。
②の x に値 3/14 を代入すると、 A6 が得られる。
②の x に値 1/14 を代入すると、 A7 が得られる。

②の x に値 15/16 を代入すると、B1 が得られる。
②の x に値 13/16 を代入すると、B2 が得られる。
②の x に値 11/16 を代入すると、B3 が得られる。
②の x に値 9/16 を代入すると、 B4 が得られる。
②の x に値 7/16 を代入すると、 B5 が得られる。
②の x に値 5/16 を代入すると、 B6 が得られる。
②の x に値 3/16 を代入すると、 B7 が得られる。
②の x に値 1/16 を代入すると、 B8 が得られる。

（注記）②の左辺級数からＬ(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のＬ(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にＬ(3)の分割級数（分身）を求めることができる。
＝＝＝

このようにＬ(3)の７分身、８分身が求まった。

このＬ(3)７分身、８分身は、Ｌ(1)７分身、８分身とその形が全く同じであることに注目いただきたい。
⇒Ｌ(1)７分身は（その３０）、Ｌ(1)８分身は（その１４）を参照。

Ｌ(3)分割の導出では、部分分数展開式を２回微分するという過酷なことをするわけだが、Ｌ(1)分割のときと全く同じ秩序で分割がなされていくのである。分割の秩序が崩れない！

いま“過酷”という表現をしたが、ふつう２回も微分すると、上記（注記）で触れたようにＬ(1)やζ(2)なども出現してきて、収拾がつかない複雑なことになる気がするのだが、なぜか綺麗な“棲み分け“が存在し、

L(1)、ξ(2)、L(3)はそれぞれ独立的に（独立国家として）存在している。すなわち、ゼータ分割の世界は、糸が絡んでいない、複雑でない！のである。

従ってL(1)の秩序（分割の形）はそのままL(3)にも引き継がれるし、さらにはL(5)、L(7)・・にも同様の秩序が引き継がれていく。「ゼータの分身たちは、シンプルで美しい世界に棲んでいる」といえるかもしれない。

視点を変えると、美しい秩序は、自明な零点（註：）における究極の美と調和を映し出した結果とも考えられる。自明な零点の根は、非自明な零点にまで伸びているはずである。

註:ゼータ分割の研究では、明示的な特殊値のゼータを主に扱っているが、明示的な特殊値が自明な零点と密接に関係することは、13 年前に開発したテイラーシステムからわかる。

2019.10.06　杉岡幹生