＜　L(3)n 分割固有方程式の判別式の値　＞

L(3)n 分身の値を解に持つ固有方程式の判別式の値を求めたので、報告したい。

L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので、次のものである。

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32$ 　-----①

まず復習から。

L(1)n 分身の値を解に持つ次の固有方程式の判別式の値は、(その１２２)で求めた通り以下のものとなった。

****

[L(1)分割におけるｎ分身の値を解にもつ固有方程式]

１分身の値を解に持つ方程式⇒ $x-1=0$

２分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2-2x-1=0$

３分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$

４分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

５分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$

６分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$

７分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$

・・・・・

****

上記 L(1)n 分割の固有方程式の判別式の値 D_n は次のようになる。

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n \quad \text{------②}$$

このように非常にきれいな形になった。

では、L(3)n 分身の値を解に持つ固有方程式の判別式の値はどうなるだろうか？

****

[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ固有方程式]

１分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x-2=0$

２分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$

３分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^3-54x^2-96x+32=0$

４分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^4-128x^3-544x^2+512x+128=0$

５分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$

６分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$

・・・・・

****

今回、これらの固有方程式の判別式の値を求めた。

一般の代数方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ -----③の判別式は、次のように定義される。

f(x)＝0 の解を$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$・・・$\alpha_n$とすると、

$$D = a_0^{n(n-1)} \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)^2 \qquad \text{-----④}$$

よって例えば、＜４分身を解に持つ方程式＞ $x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128 = 0$ ----⑤
の四つの解をα_1, α_2, α_3, α_4とすると、⑤の判別式は④から次となる。

$$D = (\alpha_4-\alpha_3)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_2-\alpha_1)^2$$

（その１２７）でのL(3)４分割の下記の結果を参考にして、⑤の四つの解は次となる。

B1 から⇒ $\alpha_1 = \sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$
-B2 から⇒ $\alpha_2 = -\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$
B3 から⇒ $\alpha_3 = \sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$
-B4 から⇒ $\alpha_4 = -\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

（その１２７）より抜粋（一部略）。

****

■L(3)４分割

$B1 = 1 -1/15^3 +1/17^3 -1/31^3 +1/33^3 -1/47^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$
$B2 = 1/3^3 -1/13^3 +1/19^3 -1/29^3 +1/35^3 -1/45^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$
$B3 = 1/5^3 -1/11^3 +1/21^3 -1/27^3 +1/37^3 -1/43^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$
$B4 = 1/7^3 -1/9^3 +1/23^3 -1/25^3 +1/39^3 -1/41^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

$B1 - B2 + B3 - B4 = L(3) = \pi^3/32$ である。B1, -B2, B3, -B4 がL(3)の４分身である。

****

上記α_1, α_2, α_3, α_4と⑥から固有方程式⑤の判別式の値 D_4を計算すると、次となった。

$D_4 = 5660234857054208 = 2^{29}\cdot 17^2\cdot 191^2 = 2^{21}\cdot 17^2\cdot 191^2\cdot 4^4$

２分割から６分割までの結果を素因数分解の形で示すと、次のようになる。

[L(3)n 分割の固有方程式の判別式の値]（２分割から６分割まで）

２分割⇒$D_2 = 2^5\cdot 3^2$
３分割⇒$D_3 = 2^{14}\cdot 3^3\cdot 11^2$
４分割⇒$D_4 = 2^{29}\cdot 17^2\cdot 191^2$
５分割⇒$D_5 = 2^{44}\cdot 5^5\cdot 179^2\cdot 421^2$
６分割⇒$D_6 = 2^{61}\cdot 3^{16}\cdot 5^2\cdot 11^2\cdot 17^2\cdot 23^2\cdot 431^2$

このようになった。突如として出てくる大きな素数 191, 179, 421, 431 は何か意味があるのだろうか。

上記においてL(1)判別式の値②との類推から、L(3)でも n^n の規則が出ているはず！と思ったので、n^n を赤字でくくり出して表現した結果を次に示す。

[L(3)n 分割の固有方程式の判別式の値]（２分割から６分割まで）

２分割⇒$D_2=2^3\cdot 3^2\cdot 2^2$

３分割⇒$D_3=2^{14}\cdot 11^2\cdot 3^3$

４分割⇒$D_4=2^{21}\cdot 17^2\cdot 191^2\cdot 4^4$

５分割⇒$D_5=2^{44}\cdot 179^2\cdot 421^2\cdot 5^5$

６分割⇒$D_6=2^{55}\cdot 3^{10}\cdot 5^2\cdot 11^2\cdot 17^2\cdot 23^2\cdot 431^2\cdot 6^6$

例えば、D_6は、

$D_6=2^{55}\cdot 3^{10}\cdot 5^2\cdot 11^2\cdot 17^2\cdot 23^2\cdot 431^2\cdot 6^6=852713708935605464392182587410643681\,2800$

というとてつもない数になる。計算は高精度計算サイトを使って行った。

https://keisan.casio.jp/calculator

赤字を見るとL(3)でもn^nの規則が出ていることがわかる。しかし次のL(1)の②のような簡明な表式を出すのは無理である。n^nの他になにか規則性はないのだろうか。

[L(1)n 分割の固有方程式の判別式の値]

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n \qquad \text{------②}$$

以上のように、L(1)やξ(2)に比べて、L(3)判別式値はもっと複雑なものになった。

最後に(その１２２)でのL(1)判別式値、(その１２３）のξ(2)判別式値、そして今回のL(3)判別式値を比較する形でまとめておこう。n^nを赤字で表した。

＝＝＝

[L(1)n 分割の固有方程式の判別式の値]（２分割から７分割まで）

２分割⇒$D_2=2\cdot 2^2$

３分割⇒$D_3=2^4\cdot 3^3$

４分割⇒$D_4=2^9\cdot 4^4$

５分割⇒$D_5=2^{16}\cdot 5^5$

６分割⇒$D_6=2^{25}\cdot 6^6$

７分割⇒$D_7=2^{36}\cdot 7^7$

・・・

上記は次のように公式化できる（予想）。

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n$$

[ξ(2)n 分割の固有方程式の判別式の値]（２分割から７分割まで）

２分割⇒$D_2=2^3\cdot 2^2$

３分割⇒$D_3=2^{10}\cdot 3^3$

４分割⇒$D_4=2^{21}\cdot 4^4$

５分割⇒$D_5=2^{36}\cdot 5^5$

６分割⇒$D_6=2^{55}\cdot 6^6$

７分割⇒$D_7=2^{78}\cdot 7^7$

・・・

上記は次のように公式化できる（予想）。

$$D_n=2^{(2n-1)(n-1)}n^n$$

[L(3)n 分割の固有方程式の判別式の値]（２分割から６分割まで）

２分割⇒$D_2=2^3\cdot 3^2\cdot 2^2$

３分割⇒$D_3=2^{14}\cdot 11^2\cdot 3^3$

４分割⇒$D_4=2^{21}\cdot 17^2\cdot 191^2\cdot 4^4$

５分割⇒$D_5=2^{44}\cdot 179^2\cdot 421^2\cdot 5^5$

６分割⇒$D_6=2^{55}\cdot 3^{10}\cdot 5^2\cdot 11^2\cdot 17^2\cdot 23^2\cdot 431^2\cdot 6^6$

・・・・

なんらかの規則性は？

＝＝＝

L(3) n 分割もなんらかの規則でもって表現できるのだろうか。L(1) とζ(2) は似ており、対の関係があるように見える。

もしかしたら L(3) も、ζ(4) を見ることで見えてくるものがあるのかもしれない。

2019.9.27　杉岡幹生