＜ L(3) ５分割、６分割とその固有方程式 ＞

（その１２７）の続きを行なう。L(3)の５分割、６分割を求め、その分身たちの値を解に持つ固有方程式を求めたので報告したい。

L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので、次のものである。

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32$ -----①

固有方程式に関し、前回(その１２７)までの結果をまず掲載しておく。次のものである。

****

[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ固有方程式]

１分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x-2=0$

２分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$

３分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^3-54x^2-96x+32=0$

４分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^4-128x^3-544x^2+512x+128=0$

****

今回、これに５分割と６分割の固有方程式を加えていく。

では、まず５分割、６分割の結果（分身たちの姿）から示す。以下の通りである。

＝＝＝

■L(3)５分割

$A1=1-1/19^3+1/21^3-1/39^3+1/41^3-1/59^3+\cdots=(\pi/20)^3\sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$

$A2=1/3^3-1/17^3+1/23^3-1/37^3+1/43^3-1/57^3+\cdots=(\pi/20)^3\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$

$A3=1/5^3-1/15^3+1/25^3-1/35^3+1/45^3-1/55^3+\cdots=(\pi/20)^3\sin(5\pi/20)/\cos^3(5\pi/20)$

$A4=1/7^3-1/13^3+1/27^3-1/33^3+1/47^3-1/53^3+\cdots=(\pi/20)^3\sin(3\pi/20)/\cos^3(3\pi/20)$

$A5=1/9^3-1/11^3+1/29^3-1/31^3+1/49^3-1/51^3+\cdots=(\pi/20)^3\sin(\pi/20)/\cos^3(\pi/20)$

$A1-A2+A3-A4+A5=L(3)=\pi^3/32$ である。<u>A1, −A2, A3, −A4, A5 がL(3)の５分身である</u>。
念のため、上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

■L(3)６分割

$B1=1-1/23^3+1/25^3-1/47^3+1/49^3-1/71^3+\cdots=(\pi/24)^3\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$

$B2=1/3^3-1/21^3+1/27^3-1/45^3+1/51^3-1/69^3+\cdots=(\pi/24)^3\sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24)$

$B3=1/5^3-1/19^3+1/29^3-1/43^3+1/53^3-1/67^3+\cdots=(\pi/24)^3\sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24)$

$B4=1/7^3-1/17^3+1/31^3-1/41^3+1/55^3-1/65^3+\cdots=(\pi/24)^3\sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24)$

$B5=1/9^3-1/15^3+1/33^3-1/39^3+1/57^3-1/63^3+\cdots=(\pi/24)^3\sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24)$

$B6=1/11^3-1/13^3+1/35^3-1/37^3+1/59^3-1/61^3+\cdots=(\pi/24)^3\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)$

$B1-B2+B3-B4+B5-B6=L(3)=\pi^3/32$ である。<u>B1, −B2, B3, −B4, B5, −B6 がL(3)の６分身である</u>。
念のため、上記式全てに対し Excel マクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

＝＝＝

＝＝＝

上の分割級数(分身)の導出過程を簡単に述べる。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^3\ +1/(3^2-x^2)^3\ +1/(5^2-x^2)^3\ +\cdot\cdot=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)\ +\ \mathrm{Others}(x)$ ---②

ここで右辺の Others(x)はＬ(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とＬ(1)に関係)、”Others(x)”とした。ここで Others(x)は次の通り。

$\mathrm{Others}(x)=\ -(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)\ +(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ²の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がＬ(1)に関係している。

上記②のｘに特定の値を代入することで、Ｌ(3)の分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

②のｘに値 9/10 を代入すると、A1 が得られる。
②のｘに値 7/10 を代入すると、A2 が得られる。
②のｘに値 5/10 を代入すると、A3 が得られる。
②のｘに値 3/10 を代入すると、A4 が得られる。
②のｘに値 1/10 を代入すると、A5 が得られる。

②のｘに値 11/12 を代入すると、B1 が得られる。
②のｘに値 9/12 を代入すると、 B2 が得られる。
②のｘに値 7/12 を代入すると、 B3 が得られる。
②のｘに値 5/12 を代入すると、 B4 が得られる。
②のｘに値 3/12 を代入すると、 B5 が得られる。
②のｘに値 1/12 を代入すると、 B6 が得られる。

注記：②の左辺級数からＬ(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のＬ(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にＬ(3)の分割級数（分身）を求めることができる。
＝＝＝

このようにＬ(3)の５分身、６分身が求まった。

５分割では、A3 がじつはＬ(3)そのものになっていることに注意いただきたい。ゼータ分割では、奇数分割の場合は必ず真ん中の分身は、元のゼータそのものとなる。そのため、奇数(2m-1)分割の場合は、実質的には(2m-2)分割ということになる。⇒上記５分割例では、$(1-1/5^3)L(3)=A1\ -A2\ -A4\ +A5$

さて、L(3) ５分身、６分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）を求めよう。
準備として、上記５分割の結果を再掲する。

■L(3) ５分割

$A1 = 1 -1/19^3 +1/21^3 -1/39^3 +1/41^3 -1/59^3 + \cdots = (\pi/20)^3\sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$

$A2 = 1/3^3 -1/17^3 +1/23^3 -1/37^3 +1/43^3 -1/57^3 + \cdots = (\pi/20)^3\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$

$A3 = 1/5^3 -1/15^3 +1/25^3 -1/35^3 +1/45^3 -1/55^3 + \cdots = (\pi/20)^3\sin(5\pi/20)/\cos^3(5\pi/20)$

$A4 = 1/7^3 -1/13^3 +1/27^3 -1/33^3 +1/47^3 -1/53^3 + \cdots = (\pi/20)^3\sin(3\pi/20)/\cos^3(3\pi/20)$

$A5 = 1/9^3 -1/11^3 +1/29^3 -1/31^3 +1/49^3 -1/51^3 + \cdots = (\pi/20)^3\sin(\pi/20)/\cos^3(\pi/20)$

$(\pi/20)^3$は無視して、右辺値を並べる。

$\sin(9\pi/20)/\cos^3(9\pi/20)$

$\sin(7\pi/20)/\cos^3(7\pi/20)$

$\sin(5\pi/20)/\cos^3(5\pi/20)$

$\sin(3\pi/20)/\cos^3(3\pi/20)$

$\sin(\pi/20)/\cos^3(\pi/20)$

解と係数の関係を使って、これら五つを解に持つ５次方程式を求めると、次となった。

$x^5 -250x^4 -2080x^3 +4000x^2 +2560x -512=0$

６分割の場合も同様に求めると、次となる。

$x^6 -432x^5 -6216x^4 +20992x^3 +25344x^2 -12288x -2048=0$

なお、上記固有方程式を求めるに、次の高精度計算サイトを利用した。
https://keisan.casio.jp/calculator

（その１２７）の結果に加えて、まとめると次のようになる。

****

[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ固有方程式]

１分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x -2=0$

２分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^2 -16x -8=0$

３分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^3 -54x^2 -96x +32=0$

４分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$

５分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^5 -250x^4 -2080x^3 +4000x^2 +2560x -512=0$

６分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^6 -432x^5 -6216x^4 +20992x^3 +25344x^2 -12288x -2048=0$

****

このように6分身までの固有方程式が求まった。これ以上は計算がたいへんなので、とりあえず6分身までで終わりとしたい。

さて、前回の４分身までの固有方程式に対し、この一連の方程式を知っているか？何か気づくことは？と数学仲間に問うたところ、「これは知らない」ということであった。Sugimoto 氏から「気付いたのは、二番目が $2k^3$ で、最後が $2^{(2k-1)}$です。」と回答があり、Ｙさんから「定数は符号を無視すると2のべき乗になっていますね. n 分割の固有方程式の定数は $2^{(2n-1)}$. 」とあった。4分身までの固有方程式ではたしかにそうなっている。

そして、今回求めた5分身、6分身の固有方程式でも確認すると、これもたしかに指摘の通りになっている。例えば6分身では、二項目の 432 が $432＝2\times6^3$、最後の 2948 が $2048＝2^{11}$ であり、Sugimoto 氏らの指摘の通りとなっている。5分身でも合っているので、確認されたい。

L(3)分割の固有方程式は、対称性、直交性を有した重要な方程式であることは間違いない。これらは、以前求めたL(1)分割の固有方程式（例えば（その118）（その122）など）とともに、L(s)ゼータの深い地点に到達するために必ず通らなくてはならないものであると考えられる。

最後に、L(1)分割、L(3)分割の固有方程式を一緒に並べておく。

****

[L (1) 分割におけるｎ分身の値を解にもつ固有方程式]

１分身の値を解に持つ方程式⇒ $x-1=0$

2分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2-2x-1=0$

3分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$

4分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

5分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$

6分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$

7分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$

・・・・・

****

****

[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ固有方程式]

１分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x-2=0$

2分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$

3分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^3-54x^2-96x+32=0$

4分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^4-128x^3-544x^2+512x+128=0$

5分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$

6分身を解にもつ固有方程式 ⇒ $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$

・・・・・

****

2019.9.22　杉岡幹生