＜ L(3) ３分割、４分割とその固有方程式 ＞

（その１２５）の続きを行なう。L(3)の３分割、４分割を求め、その分身たちの値を解に持つ固有方程式を求めたので報告する。

L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので、次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$ -----①

固有方程式に関し、前回までの結果をまず掲載しておく。次のものである。

****

[L(3)の分身の値を解にもつ固有方程式]

１分割（１分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x -2=0$

２分割（２分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x^2 -16x -8=0$

****

今回、これに３分割と４分割の結果を加えていく。

では、まず３分割、４分割の分身たちの姿から示す。

＝＝

■L(3) ３分割

$A1=\ 1 -1/11^3 +1/13^3 -1/23^3 +1/25^3 -1/35^3 +\cdots=(\pi/12)^3\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$

$A2=1/3^3 -1/9^3 +1/15^3 -1/21^3 +1/27^3 -1/33^3 +\cdots=(\pi/12)^3\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)$

$A3=1/5^3 -1/7^3 +1/17^3 -1/19^3 +1/29^3 -1/31^3 +\cdots=(\pi/12)^3\sin(\pi/12)/\cos^3(S\pi/12)$

$A1 -A2 +A3=L(3)=\pi^3/32$ である。<u>A1, −A2, A3 がL(3)の３分身である</u>。

念のため、上記式全てに対しExcel マクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

■L(3) ４分割

$B1=\ 1 -1/15^3 +1/17^3 -1/31^3 +1/33^3 -1/47^3 +\cdots=(\pi/16)^3\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$

$B2=1/3^3 -1/13^3 +1/19^3 -1/29^3 +1/35^3 -1/45^3 +\cdots=(\pi/16)^3\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$

$B3=1/5^3 -1/11^3 +1/21^3 -1/27^3 +1/37^3 -1/43^3 +\cdots=(\pi/16)^3\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$

$B4=1/7^3 -1/9^3 +1/23^3 -1/25^3 +1/39^3 -1/41^3 +\cdots=(\pi/16)^3\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

$B1 -B2 +B3 -B4=L(3)=\pi^3/32$ である。<u>B1, −B2, B3, −B4 がL(3)の４分身である</u>。

念のため、上記式全てに対しExcel マクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

$(\pi/16)^3$を除いた右辺値の具体的な値は、次の通りである。

B1⇒ $\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)=\ 32 +24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

B2⇒ $\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)=-32 +24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

B3⇒ $\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)=\ 32 -24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

B4⇒ $\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)=-32 -24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

　B1 -B2 +B3 -B4＝L(3)＝$\pi^3/32$ の計算で、√が全てきれいに消えていく様を味わっていただきたい。
ゼータの値は、みな見事な対称性に満ち満ちているのである！

＝＝＝

上の分割級数(分身)の導出過程を簡単に述べる。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2) +1/(3^2-x^2) +1/(5^2-x^2) +\cdot\cdot = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^3 +1/(3^2-x^2)^3 +1/(5^2-x^2)^3 +\cdot\cdot = (\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) + \mathrm{Others}(x)$ ---②

ここで右辺の Others(x)はL(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とL(1)に関係)、”Others(x)”とした。ここで Others(x)は次の通り。

$\mathrm{Others}(x) = -(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2) +(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がL(1)に関係している。

上記②のｘに特定の値を代入することで、L(3)の分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

②のｘに値 5/6 を代入すると、３分割の A1 が得られる。
②のｘに値 3/6(=1/2)を代入すると、３分割の A2 が得られる。
②のｘに値１/6 を代入すると、３分割の A3 が得られる。

②のｘに値 7/8 を代入すると、４分割の B1 が得られる。
②のｘに値 5/8 を代入すると、４分割の B2 が得られる。
②のｘに値 3/8 を代入すると、４分割の B3 が得られる。
②のｘに値 1/8 を代入すると、４分割の B4 が得られる。

注記：②の左辺級数からL(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のL(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで、計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にL(3)の分割級数（分身）を求めることができる。

＝＝＝

このようにL(3)の３分身、４分身が求まった。

３分割では、A2 がじつはL(3)そのものになっていることに注意いただきたい。ゼータ分割では、奇数分割の場合は必ず真ん中の分身は、元のゼータそのものとなる。そのため、奇数(2m-1)分割の場合は、実質的には(2m-2)分割ということになる。⇒上記３分割例では、$(1+1/3^3)$L(3)＝A1+A3

さて、L(3)３分身、４分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）を求めよう。
準備として、上記３分割の結果を再掲する。

■L(3) ３分割

$A1=1 -1/11^3 +1/13^3 -1/23^3 + 1/25^3 -1/35^3 + \cdot\cdot = (\pi/12)^3 \sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$

$A2=1/3^3 -1/9^3 +1/15^3 -1/21^3 + 1/27^3 -1/33^3 + \cdot\cdot = (\pi/12)^3 \sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)$

$A3=1/5^3 -1/7^3 +1/17^3 -1/19^3 + 1/29^3 -1/31^3 + \cdot\cdot = (\pi/12)^3 \sin(\pi/12)/\cos^3(S\pi/12)$

$(\pi/12)^3$は無視して、右辺値を並べる。

$\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$

$\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)$

$\sin(\pi/12)/\cos^3(S\pi/12)$

解と係数の関係を使って、これら三つを解に持つ３次方程式を求めると、次となった。

$x^3 -54x^2 -96x +32=0$ ----③

４分割の場合も同様に求めると、次のようになる。

$x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$ ----④

（その１２５）の結果も合わせて、まとめると次のようになる。

****

[L(3)の分身の値を解にもつ固有方程式]

１分割（１分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x -2=0$

２分割（２分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x^2 -16x -8=0$

３分割（３分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x^3 -54x^2 -96x +32=0$

４分割（４分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0$

****

L(1)の場合は、パスカルの三角形の二項係数を係数として持つ方程式群となったが、L(3)の場合は上記のようになった。

公式集では見ないものである。web 検索を行っても引っかかってこない（ラゲールでもない、エルミートでもない、ルジャンドルでもない・・）。高い対称性を持った重要な多項式(or 方程式)であることは間違いないのだが、既に研究されているものなのかどうか。あるいは変数変換で何かに帰着するということなのか。ともかく固有方程式は、６分割位までは求めたい。

L(1)での類推から言うと、これらL(3)ｎ分割の方程式を固有方程式として持つエルミート行列が存在するに違いない。そのエルミート行列の固有値が分身たちの値である。そして、そのエルミート行列は中心対称行列という特別なものになるに違いない。

さらにエルミート行列固有値問題の繋がりから、y=[ｎ分割固有方程式の多項式]を解にもつ微分方程式が存在するに違いない。その微分方程式は超幾何微分方程式に変換でき、その解は超幾何関数と繋がっていると考えられる。

L(1)でこのようなことを調べてきたので、L(3)でもそうなっているに違いなく、道筋は見えているのだが、実際にやろうとすると時間がかかる。

2019.9.14　杉岡幹生