＜ L(3) ２分割から虚 2 次体 Q(√－2) ゼータを構成する、ある予想の提示 ＞

前回の続きでＬ(3) ３分割をするつもりだったが、ある大事なテーマを思い出したので、今回は先にそちらをやりたい。最後に私の予想を提示した。

そのテーマはかなり前の（その５４）で既に言及していたが、忘れていたものである。ノートを眺めていて突然気づいた。はじめて気づいたような印象もあったが、過去にやったような気がして見直すとやはりやっていた。が、そのときの衝撃よりも、いまの方が大きい。
http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12898_d7.htm

まず「L(3) ２分割の 2 分身から、全く簡単に虚 2 次体 Q(√－2) ゼータ L2(s) の s＝3 の L2(3) を構成できる」ということを示したい。

ここで、L2(s) はディリクレのＬ関数Ｌ(χ, s)

$L(\chi, s) = \chi(1)/1^s + \chi(2)/2^s + \chi(3)/3^s + \chi(4)/4^s + \chi(5)/5^s + \chi(6)/6^s + \chi(7)/7^s + \cdots$

の一種であり、次のゼータである。

$L2(s) = 1 + 1/3^s - 1/5^s - 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s - /13^s - 1/15^s + 1/17^s + 1/19^s - 1/21^s - 1/23^s + \cdots$ ---①

L2(s) は虚 2 次体 Q(√-2) のゼータ関数（方程式のゼータ関数）であり、平方剰余の相互法則を介して、Ｌ(χ, s) に一致する。ディリクレ指標 χ(n) は次の通り。
n≡1 or 3 mod 8 のとき χ(n)＝1, n≡5 or 7 mod 8 のとき χ(n)＝-1, その他のとき χ(n)＝0 となる。
導手 N＝8 を持つ（導手 N＝8 の意味は、“mod 8” の 8 を意味していると考えればよい）。

なお、” L2(s) “という記号は私が使っているもので一般的なものではないので注意されたい。（以下で出てくる Lc(s) や La(s) などもみなそうである）

L2(3) は、上記 L2(s) で s＝3 としたものであり、次となる。

$L2(3) = 1 + 1/3^3 - 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 + 1/11^3 - /13^3 - 1/15^3 + 1/17^3 + 1/19^3 - 1/21^3 - 1/23^3 + \cdots$ -----②

さて、この値はいくらになるだろうか？

この問題は数学者でも難しいはずである。②はゼータ L2(s) の明示的な特殊値に属するので、なんらかの方法で数学者は求めるだろうが、難解な手法を経由して出してくるはずである。（s＝1 の場合の L2(1) ならば虚 2 次体の類数公式を使えば出るが、その公式も高級感に溢れたもので簡単なものではない。）

答えを言うと、②の値は、ずばり $3\sqrt{2}\pi^3/128$ である。すなわち次の通りである。

$$L2(3) = 1 + 1/3^3 - 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 + 1/11^3 - /13^3 - 1/15^3 + 1/17^3 + 1/19^3 - 1/21^3 - 1/23^3 + \cdots$$
$$= 3\sqrt{2}\pi^3/128$$

これはじつは前回やったＬ(3)２分割から簡単に出る。次を見ていただきたい。

＝＝＝

■L(3)２分割

A1＝ $1 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/15^3 + 1/17^3 - 1/23^3 + \cdots = (\pi/8)^3 \sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

A2＝$1/3^3 - 1/5^3 + 1/11^3 - 1/13^3 + 1/19^3 - 1/21^3 + \cdots = (\pi/8)^3 \sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

A1 -A2＝L(3)＝$\pi^3/32$ である。A1, -A2 がＬ(3)の２分身である。

右辺の三角関数の値を計算した結果は、以下の通り。

$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8) = 8 + 6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8) = -8 + 6\sqrt{2}$

＝＝＝

A1,A2 の右辺を青字のものを使って、書き直した次式を見ていただきたい。

A1＝ $1 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/15^3 + 1/17^3 - 1/23^3 + \cdots = (\pi/8)^3(8 + 6\sqrt{2})$

A2＝$1/3^3 - 1/5^3 + 1/11^3 - 1/13^3 + 1/19^3 - 1/21^3 + \cdots = (\pi/8)^3(-8 + 6\sqrt{2})$

辺々足し算するだけで(A+A2)、L2(3)が出る！

$L2(3) = 1 + 1/3^3 - 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 + 1/11^3 - /13^3 - 1/15^3 + 1/17^3 + 1/19^3 - 1/21^3 - 1/23^3 + \cdots$

$= 3\sqrt{2}\pi^3/128$

まったく簡単である。中学生でもできそうだ。

虚２次体ゼータの特殊値という難しいもの（且つ大事なもの）が、こんなにもあっけなく求まってしまうのである。L2(3)＝$3\sqrt{2}\pi^3/128$ において、どうして$\sqrt{2}$ が出てくるのかがよくわかる。

$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \cdots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

前回見たように、上のタンジェント部分分数展開式を２回微分したものからＬ(3)２分割が出る。上式を最初に導いたのはオイラーであるはずである。これがどれほどゼータの中心と直結していることかわかろうというものである。

ちなみに、上の A1 と A2 を辺々引き算すれば（A1−A2)、前回見た通りＬ(3)となる。面白いではないか。

$L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/11^3 + 1/13^3 - 1/15^3 + \cdots = \pi^3/32$

ゼータ分割(分解)の領域は、足し算、引き算の単純できれいな世界である。

先を急ぐ。

Ｌ(1)２分割を見てみたい。（その１４)、（その９６）から引用。

＝＝

■L(1)２分割

A1＝ 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +・・ ＝(π/8)tan(3π/8)

A2＝1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +・・＝(π/8)tan(π/8)

A1 -A2＝π/4=L(1)である。tan()の部分は以下の通り。

tan(3π/8)＝ 1 +√2

tan(π/8) ＝-1 +√2

＝＝

A1,A2 の右辺を青字のものを使って、書き直した次式を見ていただきたい。

A1＝ 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +・・ ＝(π/8)(1 +√2)

A2＝1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +・・＝(π/8)(-1 +√2)

辺々足し算(A1+A2)して、L2(1)を得る。まったく簡単！

L2(1)＝1 +1/3 -1/5 -1/7 +1/9 +1/11 -/13 -1/15 +1/17 +1/19 -1/21 -1/23 +・・＝√2π/4

辺々引き算(A1-A2)して、L(1)を得る。まったく簡単！

L(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 +・・＝π/4

これらは（その５４）で既に示したが、やはり面白い。L2(1)＝√2π/4 において、どうして√2 が出るのかがよくわかる。

今回見たことは、L(1)の分身たちの足し算や引き算で、様々な（明示的な）虚 2 次体ゼータを構成できるということである。（その５４）では４分割での場合も見ているが、再び引用する。

http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12898_d7.htm

＝＝

L(1)も L2(1)も同じパーツから作られていることがわかります。

違いは、パーツ（A1, A2, A3, A4）の組み合わせ方（加減の演算）の違いだけです。次の通り。

L(1)＝A1 -A2

L2(1)＝A1 +A2

L(1)＝A1 -A2 +A3 -A4

L2(1)＝A1 +A2 -A3 -A4

このような面白いことになっているのです！

この仕組みには驚きます。このことは L2(1)６分割、８分割、１０分割・・でも成り立ちます。

いえ、それだけではありません。他の虚２次体ゼータでも、L(1)のパーツ（分身たち）から構成されていく場合がかなり多くあります。

その分類と研究は、ゼータにおける大テーマです。おいおい見ていきたいと思います。

＝＝

このように昨年末（2018/12/08）に書いている。

上で「他の虚２次体ゼータでも、L(1)のパーツ（分身たち）から構成されていく場合がかなり多くあります。」と書いている。

実際構成されるものは多く、例えば、虚２次体Ｑ(√－5)のゼータ Lc(s)の s＝1 の Lc(1)も構成できる。まず Lc(1)を示す。

Lc(1)＝1 +1/3 +1/7 +1/9 -1/11 -/13 -1/17 -/19
+1/21 +1/23 +1/27 +1/29 -1/31 -1/33 -1/37 -/39+・・＝√5π/5

このゼータの導手 N は N=20 となる。ディリクレ指標χ(n)は次の通り。

n≡1 or 3 or 7 or 9 mod 20 のときχ(n)＝1

n≡11 or 13 or 17 or 19 mod 20 のときχ(n)＝-1

その他のときχ(n)＝0

さて、（その２１）で見た下記のＬ(1)１０分割から上記 Lc(1)が出ることを見てみよう。

http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12189_n8.htm　（赤字の B3 と B8 は除く）

****

■L(1)１０分割

B1＝ 1 -1/39 +1/41 -1/79 +1/81 -1/119 +・・ ＝(π/40)tan(19π/40)

B2＝1/3 -1/37 +1/43 -1/77 +1/83 -1/117 +・・＝(π/40)tan(17π/40)

B3＝1/5 -1/35 +1/45 -1/75 +1/85 -1/115 +・・＝(π/40)tan(15π/40)

B4＝1/7 -1/33 +1/47 -1/73 +1/87 -1/113 +・・ ＝(π/40)tan(13π/40)

B5＝1/9 -1/31 +1/49 -1/71 +1/89 -1/111 +・・ ＝(π/40)tan(11π/40)

B6＝1/11 -1/29 +1/51 -1/69 +1/91 -1/109 +・・ ＝(π/40)tan(9π/40)

B7＝1/13 -1/27 +1/53 -1/67 +1/93 -1/107 +・・ ＝(π/40)tan(7π/40)

B8＝1/15 -1/25 +1/55 -1/65 +1/95 -1/105 +・・ ＝(π/40)tan(5π/40)

B9＝1/17 -1/23 +1/57 -1/63 +1/97 -1/103 +・・ ＝(π/40)tan(3π/40)

B10＝1/19 -1/21 +1/59 -1/61 +1/99 -1/101 +・・ ＝(π/40)tan(π/40)

B1 -B2 +B3 -B4 +B5 -B6 +B7 -B8 +B9 -B10＝L(1) である。

****

赤字の二つは除いて、次を得る。

B1 +B2 +B4 +B5 −B6 −B7 −B9 −B10

$=1 +1/3 +1/7 +1/9 -1/11 -/13 -1/17 -/19$
$+1/21 +1/23 +1/27 +1/29 -1/31 -1/33 -1/37 -/39 +\cdots=Lc(1)$

このように B3 と B8 を除いた L(1)の分身たちから Lc(1)が得られるのである。

右辺値での計算でも当然成り立っていて、次のようになる。
$(\pi/40)\{\tan(19\pi/40)+\tan(17\pi/40)+\tan(13\pi/40)+\tan(11\pi/40)-\tan(9\pi/40)-\tan(7\pi/40)-\tan(3\pi/40)-\tan(\pi/40)\}=\sqrt{5}\pi/5$

$Lc(1)=\sqrt{5}\pi/5$ の$\sqrt{5}$ はこのようして出てくるのである。

これらを眺めていて、ふと思った。

全ての虚 2 次体ゼータは、L(1)の分身たちから構成されるのではないか？と。

さらにもう少し見てみよう。（その２８）では、下記の L(1)３分割を見た。tan()の値は今回追加した。
http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12305_z4.htm

****
■L(1)３分割
$A1= 1 -1/11 +1/13 -1/23 +1/25 -1/35 +\cdots =(\pi/12)\tan(5\pi/12)$
$A2=1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +\cdots=(\pi/12)\tan(3\pi/12)$
$A3=1/5 -1/7 +1/17 -1/19 +1/29 -1/31 +\cdots=(\pi/12)\tan(\pi/12)$

$A1 -A2 +A3=L(1)$ である。
$\tan(5\pi/12)=2 +\sqrt{3}$, $\tan(\pi/12)= 2 -\sqrt{3}$
****

上記から、虚２次体 $Q(\sqrt{-3})$ゼータ $LA(s)$と本質的に同じ $La(s)$の $s=1$ のケースの
$La(1)=1 -1/5 +1/7 -1/11 +1/13 -1/17 +1/19 -1/23 +1/25 -1/29 +1/31 -1/35 +\cdots$
が簡単に出るのであるが、それを見てみよう。

赤字の A2 は除いて右辺値 tan()も数値に置き換えて書き直すと、次となる。
$A1=1 -1/11 +1/13 -1/23 +1/25 -1/35 +\cdots =(\pi/12)(2 +\sqrt{3})$
$A3=1/5 -1/7 +1/17 -1/19 +1/29 -1/31 +\cdots=(\pi/12)(2 -\sqrt{3})$

これから次を得る。
$A1 -A3=La(1)=1 -1/5 + 1/7 -1/11 +1/13 -1/17 +1/19 -1/23 +1/25 -1/29 +1/31 -1/35 +\cdots=\sqrt{3}\pi/6$

このように La(1)が求まった。全く簡単である。$La(1)=\sqrt{3}\pi/6$ の$\sqrt{3}$ はこのようにして出てくるのである。

ここでLA(s)ゼータはL関数L(χ,s)の一種で、虚２次体Q($\sqrt{-3}$)ゼータである。

LA(s)＝$1 -1/2^s +1/4^s -1/5^s +1/7^s -1/8^s +1/10^s -1/11^s +1/13^s -1/14^s +1/16^s -1/17^s +\cdots$

（導手N=3,　n≡0, 1, 2 mod 3に対し、それぞれχ(n)＝0, 1, -1）

La(1)は簡単な変形で、LA(1)に変換できる。つまりLa(1)＝3/2LA(1) であり、本質的にLA(1)と同じである。
その変形の詳細は下記（その２９）参照。
http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12342_d1.htm

このようにL(1)の分身たちから、様々な（明示的なケースの）虚２次体ゼータが生み出されていく。

そして、それは全ての虚２次体ゼータを尽くすのではなかろうか。さらにそれはL(3)、L(5)の分身たちでも同様に成り立つのではないか。

このような考察から次の予想を提示したい。

＝＝＝

予想

L(1)の分身たちから、全ての虚2次体ゼータL(χ,1)を構成できるのではないか。

さらには、L(2m-1)の分身たちから、全ての虚2次体ゼータL(χ,2m-1)を構成できるのではないか。

ここでmは1以上の整数。

＝＝＝

これは数論とゼータにおける大きなテーマであり、今後も確かめていく必要がある。

2019.9.6　杉岡幹生