

＜ L(1)n 分割付随-逆固有方程式と ζ(2)n 分割付随-逆固有方程式 ＞

(その122)、(その123)でL(1)とζ(2)の分身を解にもつ固有方程式の判別式を調べましたが、その判別式は世にも美しい形となり、そしてL(1)とζ(2)で驚くべき類似性があることを見ました。

今回のテーマの関連でそれをまずはじめに再掲します。以下のものです。

=====

[L(1)n 分身を解にもつ固有方程式の判別式の値 D_n]

$$D_n = 2^{(n-1)^2} n^n \quad \text{---- [1]}$$

[固有方程式]

$$L(1) \text{ 1 分割} \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 2 分割} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 3 分割} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 4 分割} \Rightarrow x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 5 分割} \Rightarrow x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 6 分割} \Rightarrow x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 7 分割} \Rightarrow x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$$

.....

[ζ(2)n 分身を解にもつ固有方程式の判別式の値 D_n]

$$D_n = 2^{(2n-1)(n-1)} n^n \quad \text{---- [2]}$$

[固有方程式]

$$\zeta(2) \text{ 1 分割} \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 2 分割} \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 3 分割} \Rightarrow x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 4 分割} \Rightarrow x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 5 分割} \Rightarrow x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 6 分割} \Rightarrow x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 7 分割} \Rightarrow x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$$

.....

=====

すこし前に、これら固有方程式に関係する超幾何微分方程式などを考察しましたが、その考察の途中で、この固有方程式の x を $1/x$ に置き換えた式も出てきて、それも面白そうだ・・とっていました。そこで、上記の固有方程式の x を $1/x$ で置き換えた方程式の判別式も求めたくなり、今回求めたので報告します。

L(1)の固有方程式での x を $1/x$ で置き換えたものを L(1)n 分割付随-逆固有方程式と名付けます。と (2) の固有方程式での x を $1/x$ で置き換えたものをと (2)n 分割付随-逆固有方程式と名付けます。簡単な式変形から、それはすぐに出て、以下のものになります。

=====

[L(1)n 分割付随-逆固有方程式]

- 1 次⇒ $x^{-1}=0$
- 2 次⇒ $x^2+2x^{-1}=0$
- 3 次⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$
- 4 次⇒ $x^4+4x^3-6x^2-4x+1=0$
- 5 次⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$
- 6 次⇒ $x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1=0$
- 7 次⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$
-

[と (2)n 分割付随-逆固有方程式]

- 1 次⇒ $2x^{-1}=0$
- 2 次⇒ $8x^2-8x+1=0$
- 3 次⇒ $32x^3-48x^2+18x-1=0$
- 4 次⇒ $128x^4-256x^3+160x^2-32x+1=0$
- 5 次⇒ $512x^5-1280x^4+1120x^3-400x^2+50x-1=0$
- 6 次⇒ $2048x^6-6144x^5+6912x^4-3584x^3+840x^2-72x+1=0$
- 7 次⇒ $8192x^7-28672x^6+39424x^5-26880x^4+9408x^3-1568x^2+98x-1=0$
-

=====

と (2)n 分割付随-逆固有方程式の左辺は、チェビシェフの多項式とほとんど同じものになりました。 x を x^2 で置き換えたら、チェビシェフの多項式（の偶数番目）になりますからチェビシェフと本質的に同じものです。L(1)では、冒頭の固有方程式とこの逆固有方程式で、奇数次（奇数分割）の式がまったく同じになりました。面白いことです。

さて、前回、前々回と同様に、これら逆固有方程式の判別式の値をそれぞれ5次まで求めました。

結果を整理して書くと、次のようになりました。

=====

[L(1)n 分割付随-逆固有方程式]

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n \text{ -----①}$$

$$2 \text{ 次} \Rightarrow D_2 = 2 \cdot 2^2$$

$$3 \text{ 次} \Rightarrow D_3 = 2^4 \cdot 3^3$$

$$4 \text{ 次} \Rightarrow D_4 = 2^9 \cdot 4^4$$

$$5 \text{ 次} \Rightarrow D_5 = 2^{16} \cdot 5^5$$

以降の n 次でも①の規則に従っていることは間違いない（予想）。

[ζ (2) n 分割付随-逆固有方程式]

$$D_n = 2^{(2n-1)(n-1)^2} n^n \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

$$2 \text{ 次} \Rightarrow D_2 = 2^3 \cdot 2^2$$

$$3 \text{ 次} \Rightarrow D_3 = 2^{20} \cdot 3^3$$

$$4 \text{ 次} \Rightarrow D_4 = 2^{63} \cdot 4^4$$

$$5 \text{ 次} \Rightarrow D_5 = 2^{144} \cdot 5^5$$

以降の n 次でも②の規則に従っていることは間違いない（予想）。

=====

なんと $L(1)$ 関連では、固有方程式と逆固有方程式とは判別式の値 D_n が一致してしまいました。[1]と①を比べてください。

ζ (2) 関連では[2]と②を比べて、こちらも極めて似た結果になりました。

x を $1/x$ に置き換えた式もこのように面白い結果になりました。このようなことになるのは冒頭の固有方程式の解の対称性によります。

どういうことかということ、例えば、 $L(1)$ 2 分割の 2 分身（の本質）は固有方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解ですが、それは $\alpha_1 = \tan(3\pi/8) = 1 + \sqrt{2}$ 、 $\alpha_2 = -\tan(\pi/8) = 1 - \sqrt{2}$ です。一方対応する逆固有方程式は上方で示した $x^2 + 2x - 1 = 0$ ですが、この解は α_1 と α_2 の逆数の $1/\alpha_1$ 、 $1/\alpha_2$ になります。

つまり

$$1/\alpha_1 = 1/\tan(3\pi/8) = 1/(1 + \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = -(1 - \sqrt{2}) = -\alpha_2$$

$$1/\alpha_2 = -1/\tan(\pi/8) = 1/(1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} = -(1 + \sqrt{2}) = -\alpha_1$$

となります。

このことから

$$(1/\alpha_2 - 1/\alpha_1)^2 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \quad \text{-----} \textcircled{3}$$

となる。

ここで判別式の定義を復習します。一般の代数方程式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ の判別式 D は、次のように定義されます。 $f(x) = 0$ の根を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ とすると、次となる。

$$D = a_0^{n(n-1)} \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)^2 \quad \text{-----} \textcircled{4}$$

④と③の結果から、逆固有方程式の判別式 $D_2 = (1/\alpha_2 - 1/\alpha_1)^2$ は固有方程式の判別式 $D_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2$ と一致するというわけです。

他の分割でも固有方程式の解は、全てべき根で表され、且つ対称的になっているので（全ての n でそのはず）、①と[1]で判別式は一致すると考えられます。

と(2)に関し、[2]と②で判別式が似ているのも L(1)と同類の理由によります。しかし完全に一致していません。一致していないのは、④の定義（a₀に着目）と[2]と②の形の違い辺りを考えれば見えてきそうです。

ちょっと話題を変えて、数学者の加藤和也さんは、「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）の中で、 $\zeta(2) = \pi^2/6$ について、次のように述べています。P. 246～247 から引用。

=====

$$(2.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} \pi^2 \quad (\pi \text{ は円周率})$$

という式のふしぎについてしばらく論じたい。ふしぎなのは、左辺をいくら見つめても影も形もない円周率が、どうしてか右辺にあらわれることである。

．．．．

その頃 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ を求めようとした人々の努力があった。――1728 年にベルヌイは、この和が 8/5 に近いと述べ、1729 年にゴールドバッハはこの和が 1.6437 と 1.6453 の間にあることを．．．(略)．．．

．．．そしてついにオイラーは 1735 年にそれが $\pi^2/6$ であることをつきとめたのである。

そしてオイラーは「私も何度試みても、それらの和に対する近似値しか得られませんでした．．．しかるに、今回まったく思いもかけず、 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ の優雅な公式が発見できました。それは円積問題（つまり円周率に）関係しているのです。」とその喜びを書いた。

この式(2.1)を、それに類似した式

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots = 1$$

に比べれば、両者の間には大きな格調の差があることが知れ、オイラーの喜びも伝わってくる気持がする。式(2.1)のような格調ある事柄は、証明も難しいけれども、たとえ証明を知ってもふしぎさは残り、数学のいつまでも汲みつくせない源泉として生き続けていく事柄であるような気がする。

=====

さて、冒頭での結果の核心部分を再掲します。

[L(1)分身を解にもつ固有方程式の判別式の値 D_n]

$$D_n = 2^{(n-1)^2} n^n \quad \text{----}[1]$$

[$\zeta(2)$ 分身を解にもつ固有方程式の判別式の値 D_n]

$$D_n = 2^{(2n-1)(n-1)} n^n \quad \text{----}[2]$$

これらは非常に優雅な結果といえます。その凄さに魅了されてしまいます。オイラーの出した $\zeta(2) = \pi^2/6$ のような格調の高さがあります。

今回、固有方程式の x を $1/x$ に変えてもほとんど判別式の姿が変わらなかったことから、判別式の保型性が出ているともいえるのではないのでしょうか。

冒頭の $L(1)$ や $\zeta(2)$ の n 分割の固有方程式は、極めて高い対称性をもった方程式です。その対称性があるがゆえにゼータは任意に分割され、どんどんと分解されていきます。すべては対称性のおかげです。

解の対称性と判別式の保型性には関係があるはずです。

最後に、 $(x-1)^n$ の多項式から成る方程式を少し考えてみましょう。それは二項係数から成るもので、 $L(1)n$ 分割固有方程式に大変似た次のものになります。[$L(1)n$ 分身を解にもつ固有方程式]と一緒に並べます。

=====

[$(x-1)^n$ 多項式から成る方程式]

$$1 \text{ 次} \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$2 \text{ 次} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$3 \text{ 次} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$4 \text{ 次} \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$5 \text{ 次} \Rightarrow x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$6 \text{ 次} \Rightarrow x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$7 \text{ 次} \Rightarrow x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1 = 0$$

.

[$L(1)n$ 分身を解にもつ固有方程式]

$$L(1) \text{ 1 分割} \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 2 分割} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 3 分割} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 4 分割} \Rightarrow x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 5 分割} \Rightarrow x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 6 分割} \Rightarrow x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$L(1) \text{ 7 分割} \Rightarrow x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$$

.

=====

二つを比べてどうでしょうか？

非常に似ていますね。係数の値(絶対値)はまったく同じです。

違いは+と-の符号の並びがちがっているだけです。どちらかという、 $(x-1)^n$ 多項式の方が符号の並びがきれいです。

では、両者の判別式はどうでしょうか？

$(x-1)^n$ 多項式の判別式 D_n は 全ての n で 0 です。(n は 2 以上の整数)

$$D_n = 0$$

重解を持つので 0 となります。味気ないものです。

一方、 $L(1)^n$ 分身の方の判別式は、次です。

$$D_n = 2^{(n-1)^2} n^n \quad \text{-----} [1]$$

この優雅さ！美しさ！

この両者の落差は为什么呢。ちょっとの違いでこんなにも違いが出るというのは面白いことです。

格調高い[1]は、 $L(1)$ は無限に分割できる（任意分割可能）という驚愕の事実を一手に表現しているのかもしれませんが。

2019. 8. 25 杉岡幹生