＜　ζ(2)n 分割固有方程式の判別式の値　＞

ζ(2)すなわち Z(2)の n 分割の分身たちを生み出す固有方程式の判別式を考察したので報告します。その判別式の値を求めた結果、前回の L(1)と同様、特徴的な値が得られました。

結論を先に示すと、一連の n 分割の固有方程式の判別式の値を D_n とした場合、それは次のようになります。

$$D_n=2^{(2n-1)(n-1)}n^n \qquad \text{------①}$$

上は、{2 の(2n-1)(n-1)乗}×(n の n 乗)の意味です。このようにきれいな結果になりました。また L(1)での値と類似の形をしていて驚きます（最後参照）。

ζ(2)はリーマンゼータζ(s)の s=2 のものですが、Z(2)とは次の関係があり、両者は本質的に等しいものです。“Z(2)”は私が使っている記号で、一般的なものではないので注意ください。

$Z(2)＝1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 +1/9^2 +1/11^2 +\cdot\cdot$

$＝1 +1/2^2 +1/3^2 +1/4^2 + 1/5^2 +1/6^2 +1/7^2 \cdot\cdot - (1/2^2 +1/4^2 +1/6^2 + \cdot\cdot)$

$＝\zeta(2) -(1/2^2)\zeta(2) ＝(3/4)\zeta(2)＝\pi^2/8$ 　　　　　　　　--------②

以下、①の導出過程を示しますが、まず最初にζ(2)n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）を掲げます。これまで見てきた次のものになります。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ζ(2)（すなわち Z(2)）の分身を生む固有方程式は以下のものです。

ζ(2)１分割⇒ $x -2＝0$

ζ(2)２分割⇒ $x^2 -8x +8＝0$

ζ(2)３分割⇒ $x^3 -18x^2 +48x -32＝0$

ζ(2)４分割⇒ $x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128＝0$

ζ(2)５分割⇒ $x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512＝0$

ζ(2)６分割⇒ $x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048＝0$

ζ(2)７分割⇒ $x^7 -98x^6 +1568x^5 -9408x^4 +26880x^3 -39424x^2 +28672x -8192＝0$

・・・・・・

これら固有方程式の解は、“全て実根”であり、ζ(2)つまり Z(2)の分身の値（特殊値）となる。例えば、ζ(2)３分割の $x^3 -18x^2 +48x -32＝0$ の三根は、下記の Z(2)３分身 A1, A2, A3 に対応する $1/\cos^2(5\pi/12)$、$1/\cos^2(3\pi/12)$、$1/\cos^2(\pi/12)$となる。なお、上記固有方程式の左辺の多項式は、第一種チェビシェフ多項式と関連がある。

（その９８）から抜粋（一部文言変更）。

****

■Z(2) ３分割

$A1 = 1 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/35^2 + \cdots = (\pi/12)^2/\cos^2(5\pi/12)$

$A2 = 1/3^2 + 1/9^2 + 1/15^2 + 1/21^2 + 1/27^2 + 1/33^2 + \cdots = (\pi/12)^2/\cos^2(3\pi/12)$

$A3 = 1/5^2 + 1/7^2 + 1/17^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/31^2 + \cdots = (\pi/12)^2/\cos^2(\pi/12)$

A1 +A2 +A3＝Z(2)であることがわかります。A1, A2, A3 が Z(2)３分身である。

ここで $1/\cos^2(\ )$ の値は、次の通り。

$1/\cos^2(5\pi/12) = 8+4\sqrt{3}$

$1/\cos^2(3\pi/12) = 2$

$1/\cos^2(\pi/12) = 8-4\sqrt{3}$

****

＝＝＝

さて、一般の代数方程式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ の判別式 D は、次のように定義される。

$f(x)=0$ の根を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$ とすると、

$$D = a_0^{n(n-1)} \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)^2 \qquad \text{-----③}$$

$\zeta(2)$ つまり Z(2)の４分割を例にとって考えます。

$\zeta(2)$ ４分割⇒ $x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$ ----④

の四つの解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とすると、④の判別式は③から次となる。

$$D = (\alpha_4-\alpha_3)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_2-\alpha_1)^2 \qquad \text{-----⑤}$$

（その１５）の Z(2)４分割の結果を参考にして（下記参照）、④の四つの解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は次となる。

B1 から⇒ $\alpha_1 = 1/\cos^2(7\pi/16)$

B2 から⇒ $\alpha_2 = 1/\cos^2(5\pi/16)$

B3 から⇒ $\alpha_3 = 1/\cos^2(3\pi/16)$

B4 から⇒ $\alpha_4 = 1/\cos^2(\pi/16)$

（その１５）より抜粋。

****

■Z(2) ４分割

$B1 = 1 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/31^2 + 1/33^2 + 1/47^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(7\pi/16)$

$B2 = 1/3^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/35^2 + 1/45^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(5\pi/16)$

$B3 = 1/5^2 + 1/11^2 + 1/21^2 + 1/27^2 + 1/37^2 + 1/43^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(3\pi/16)$

$B4 = 1/7^2 + 1/9^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/39^2 + 1/41^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(\pi/16)$

　B1 +B2 +B3 +B4＝Z(2)＝$\pi^2/8$ であることがわかる。B1, B2, B3, B4 が Z(2)４分身である。

　1/$\cos^2$( )の部分を計算した結果は、以下の通り。

$1/\cos^2(7\pi/16)= 8 +4\sqrt{2} + 4\sqrt{(2+\sqrt{2})} +2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$1/\cos^2(5\pi/16)= 8 -4\sqrt{2} + 4\sqrt{(2-\sqrt{2})} -2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$1/\cos^2(3\pi/16)= 8 -4\sqrt{2} - 4\sqrt{(2-\sqrt{2})} +2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$1/\cos^2(\pi/16) = 8 +4\sqrt{2} - 4\sqrt{(2+\sqrt{2})} -2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

****

上記$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$と⑤から、固有方程式④の判別式の値 D_4を計算すると次となりました。

D_4＝536870912＝$2^{21}4^4$

２分割から７分割までの結果をすべて示すと、次となります。

２分割⇒$D_2=2^3\cdot 2^2$
３分割⇒$D_3=2^{10}\cdot 3^3$
４分割⇒$D_4=2^{21}\cdot 4^4$
５分割⇒$D_5=2^{36}\cdot 5^5$
６分割⇒$D_6=2^{55}\cdot 6^6$
７分割⇒$D_7=2^{78}\cdot 7^7$

　D_4以降は手計算では無理で、Excel と次の高精度計算サイトのお世話になりました。
https://keisan.casio.jp/calculator

　上記の一連の結果から冒頭の結果①に行き着いたというわけです。

$$D_n=2^{(2n-1)(n-1)}n^n \qquad \text{------①}$$

厳密には予想ですが、任意のｎでこうなっていることは間違いありません。

$\zeta(2)=1 +1/2^2 +1/3^2 +1/4^2 +1/5^2 +1/6^2 +\cdot\cdot=\pi^2/6$

　単発的に見えるこの式の裏側には、この１年間見てきた通り、壮大な構造（物語）が隠されています。それはζ(2)がｎ分割可能である（分身たちに分解される）ということ。そのｎ分割に対応する一連の固有方程式（上方参照）の特徴は、「すべての解が実数解である。すべての解は対称的にべき根（n 乗根）で表される。」となっている（はずの）ことであり（ガロア理論に関係）、その特別な特徴が D_nの値に反映されているような気がします。

前回のＬ(1)と今回のζ(2)で結果が似ているので、最後に並べておきます。

＝＝＝

[L(1)分身を解にもつ固有方程式の判別式の値 D_n]

$D_n=2^{(n-1)^2}n^n$　つまり、　$D_n=2^{(n-1)(n-1)}n^n$

［固有方程式］

Ｌ(1)１分割⇒ $x-1=0$

Ｌ(1)２分割⇒ $x^2-2x-1=0$

Ｌ(1)３分割⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$

Ｌ(1)４分割⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

Ｌ(1)５分割⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$

Ｌ(1)６分割⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$

Ｌ(1)７分割⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$

・・・・・・

[ζ(2)分身を解にもつ固有方程式の判別式の値 D_n]

$D_n=2^{(2n-1)(n-1)}n^n$

［固有方程式］

ζ(2)１分割⇒ $x-2=0$

ζ(2)２分割⇒ $x^2-8x+8=0$

ζ(2)３分割⇒ $x^3-18x^2+48x-32=0$

ζ(2)４分割⇒ $x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$

ζ(2)５分割⇒ $x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512=0$

ζ(2)６分割⇒ $x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048=0$

ζ(2)７分割⇒ $x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192=0$

・・・・・・

＝＝＝

両者の D_n は非常に似ています。驚くべき類似性といえます。これら背後に何かがあるに違いありません。

2019.8.18　杉岡幹生