

$$A_{10} = 1/19 - 1/37 + 1/75 - 1/93 + 1/131 - 1/149 + \dots = (\pi/56)\tan(9\pi/56)$$

$$A_{11} = 1/21 - 1/35 + 1/77 - 1/91 + 1/133 - 1/147 + \dots = (\pi/56)\tan(7\pi/56)$$

$$A_{12} = 1/23 - 1/33 + 1/79 - 1/89 + 1/135 - 1/145 + \dots = (\pi/56)\tan(5\pi/56)$$

$$A_{13} = 1/25 - 1/31 + 1/81 - 1/87 + 1/137 - 1/143 + \dots = (\pi/56)\tan(3\pi/56)$$

$$A_{14} = 1/27 - 1/29 + 1/83 - 1/85 + 1/139 - 1/141 + \dots = (\pi/56)\tan(\pi/56)$$

$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 - A_8 + A_9 - A_{10} + A_{11} - A_{12} + A_{13} - A_{14} = \pi/4 = L(1)$ となる。

ここで、 A_1, A_2, \dots, A_{14} が $L(1)$ の 14 分身である。

■ $L(1)$ 28 分割

$$B_1 = 1 - 1/111 + 1/113 - 1/223 + 1/225 - 1/335 + \dots = (\pi/112)\tan(55\pi/112)$$

$$B_2 = 1/3 - 1/109 + 1/115 - 1/221 + 1/227 - 1/333 + \dots = (\pi/112)\tan(53\pi/112)$$

$$B_3 = 1/5 - 1/107 + 1/117 - 1/219 + 1/229 - 1/331 + \dots = (\pi/112)\tan(51\pi/112)$$

$$B_4 = 1/7 - 1/105 + 1/119 - 1/217 + 1/231 - 1/329 + \dots = (\pi/112)\tan(49\pi/112)$$

$$B_5 = 1/9 - 1/103 + 1/121 - 1/215 + 1/233 - 1/327 + \dots = (\pi/112)\tan(47\pi/112)$$

$$B_6 = 1/11 - 1/101 + 1/123 - 1/213 + 1/235 - 1/325 + \dots = (\pi/112)\tan(45\pi/112)$$

$$B_7 = 1/13 - 1/99 + 1/125 - 1/211 + 1/237 - 1/323 + \dots = (\pi/112)\tan(43\pi/112)$$

$$B_8 = 1/15 - 1/97 + 1/127 - 1/209 + 1/239 - 1/321 + \dots = (\pi/112)\tan(41\pi/112)$$

$$B_9 = 1/17 - 1/95 + 1/129 - 1/207 + 1/241 - 1/319 + \dots = (\pi/112)\tan(39\pi/112)$$

$$B_{10} = 1/19 - 1/93 + 1/131 - 1/205 + 1/243 - 1/317 + \dots = (\pi/112)\tan(37\pi/112)$$

$$B_{11} = 1/21 - 1/91 + 1/133 - 1/203 + 1/245 - 1/315 + \dots = (\pi/112)\tan(35\pi/112)$$

$$B_{12} = 1/23 - 1/89 + 1/135 - 1/201 + 1/247 - 1/313 + \dots = (\pi/112)\tan(33\pi/112)$$

$$B_{13} = 1/25 - 1/87 + 1/137 - 1/199 + 1/249 - 1/311 + \dots = (\pi/112)\tan(31\pi/112)$$

$$B_{14} = 1/27 - 1/85 + 1/139 - 1/197 + 1/251 - 1/309 + \dots = (\pi/112)\tan(29\pi/112)$$

$$B_{15} = 1/29 - 1/83 + 1/141 - 1/195 + 1/253 - 1/307 + \dots = (\pi/112)\tan(27\pi/112)$$

$$B_{16} = 1/31 - 1/81 + 1/143 - 1/193 + 1/255 - 1/305 + \dots = (\pi/112)\tan(25\pi/112)$$

$$B_{17} = 1/33 - 1/79 + 1/145 - 1/191 + 1/257 - 1/303 + \dots = (\pi/112)\tan(23\pi/112)$$

$$B_{18} = 1/35 - 1/77 + 1/147 - 1/189 + 1/259 - 1/301 + \dots = (\pi/112)\tan(21\pi/112)$$

$$B_{19} = 1/37 - 1/75 + 1/149 - 1/187 + 1/261 - 1/299 + \dots = (\pi/112)\tan(19\pi/112)$$

$$B_{20} = 1/39 - 1/73 + 1/151 - 1/185 + 1/263 - 1/297 + \dots = (\pi/112)\tan(17\pi/112)$$

$$B_{21} = 1/41 - 1/71 + 1/153 - 1/183 + 1/265 - 1/295 + \dots = (\pi/112)\tan(15\pi/112)$$

$$B_{22} = 1/43 - 1/69 + 1/155 - 1/181 + 1/267 - 1/293 + \dots = (\pi/112)\tan(13\pi/112)$$

$$B_{23} = 1/45 - 1/67 + 1/157 - 1/179 + 1/269 - 1/291 + \dots = (\pi/112)\tan(11\pi/112)$$

$$B_{24} = 1/47 - 1/65 + 1/159 - 1/177 + 1/271 - 1/289 + \dots = (\pi/112)\tan(9\pi/112)$$

$$B_{25} = 1/49 - 1/63 + 1/161 - 1/175 + 1/273 - 1/287 + \dots = (\pi/112)\tan(7\pi/112)$$

$$B_{26} = 1/51 - 1/61 + 1/163 - 1/173 + 1/275 - 1/285 + \dots = (\pi/112)\tan(5\pi/112)$$

$$B_{27} = 1/53 - 1/59 + 1/165 - 1/171 + 1/277 - 1/283 + \dots = (\pi/112)\tan(3\pi/112)$$

$$B_{28} = 1/55 - 1/57 + 1/167 - 1/169 + 1/279 - 1/281 + \dots = (\pi/112)\tan(\pi/112)$$

$\sum_{i=1}^{28} (-1)^{i+1} B_i = L(1) = \pi/4$ となる。ここで B_1, B_2, \dots, B_{28} が $L(1)$ の 28 分身である。

念のため、上記 $B_1 \sim B_{28}$ に対し Excel マクロで数値検証しましたが、左辺の級数は右辺値に収束しました。右辺値の全ての和も $\pi/4$ に一致しました。 $B_1 \sim B_{28}$ の導出方法は以下の通り。

=====
< L(1) 2 8 分身(B1~B28)の導出方法 >

L(1) 2 8 分身の導出過程を簡単に述べます。次の部分分数展開式を使います。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$$

この x に $(2m-1)/56$ の値を $m=28, 27, \dots, 2, 1$ の順番で代入することで、それぞれ分割級数 (分身) B1, B2, B3, ..., B27, B28 が求まります。

以上。

=====
上記の結果から「1 4 分割の分身たちは、2 8 分割の分身たちに分解する」ことが言えるのですが、見てみましょう。どうなっているかという、次のようになっています。

- A1 = B1 · B28 ----[1]
- A2 = B2 · B27 ----[2]
- A3 = B3 · B26 ----[3]
- A4 = B4 · B25 ----[4]
- A5 = B5 · B24 ----[5]
- A6 = B6 · B23 ----[6]
- A7 = B7 · B22 ----[7]
- A8 = B8 · B21 ----[8]
- A9 = B9 · B20 ----[9]
- A10 = B10 · B19 ----[10]
- A11 = B11 · B18 ----[11]
- A12 = B12 · B17 ----[12]
- A13 = B13 · B16 ----[13]
- A14 = B14 · B15 ----[14]

それぞれの分身がある規則に従って二つに分解して (割れて) いることがわかります。級数での成立は簡単にわかります (眺めればわかります)。級数の値での成立は、三角関数において成立する次式を使うことで容易に確かめられます。

$$\tan(\pi/2 - 2x) = (1/2)\{\tan(\pi/2 - x) - \tan(x)\}$$

この x に、 $\pi/112, 3\pi/112, 5\pi/112, 7\pi/112, 9\pi/112, 11\pi/112, 13\pi/112, 15\pi/112, 17\pi/112, 19\pi/112, 21\pi/112, 23\pi/112, 25\pi/112, 27\pi/112$ を代入することで、それぞれ[1]~[14]の成立を確かめることができます。

以上より、1 4 個の分身が 2 8 個の分身に分解することが確認できました。このようにゼータでは一つの分身が二つに割れていきます。

以上。