＜ L(1)分割の微分方程式と超幾何微分方程式、Goldberg 関係式 ＞

L(1)分割の微分方程式で考えていたテーマが解決できたと思うので、報告します。

テーマとは（その１１５）の最後で与えた推論（３）のことですが、それをζ(2)と L(1)の微分方程式最終形とともに抜き出すと、下記の青字のものになります。

（その１１５）から抜粋。

ζ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x-(4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \quad \text{------①}$$

(n=1, 2, 3,・・)

または

$$x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(y/x^n)\right\} = -n^2(y/x^n) \quad \text{--------②}$$

①と②は、本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下の ζ(2) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば ζ(2) 3 分身の場合、n=3 とした①または②は、y= x^3 -18x^2 +48x -32 を特殊解に持つ。

ζ(2) １分身の値を解に持つ方程式⇒ x -2＝0
ζ(2) ２分身の値を解に持つ方程式⇒ x^2 -8x +8＝0
ζ(2) ３分身の値を解に持つ方程式⇒ x^3 -18x^2 +48x -32＝0
ζ(2) ４分身の値を解に持つ方程式⇒ x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128＝0
ζ(2) ５分身の値を解に持つ方程式⇒ x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512＝0
ζ(2) ６分身の値を解に持つ方程式⇒ x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048＝0
ζ(2) ７分身の値を解に持つ方程式⇒ x^7 -98x^6 +1568x^5 -9408x^4 +26880x^3 -39424x^2 +28672x -8192＝0
・・・・・・

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----[1]}$$

(n=1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \quad \text{------[2]}$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下の L(1) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば L(1) 3 分身の場合、n=3 とした[1]と[2]は、$y= x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ を特殊解に持つ。

L(1) 1 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x - 1 = 0$
L(1) 2 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2 - 2x - 1 = 0$
L(1) 3 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$
L(1) 4 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$
L(1) 5 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$
L(1) 6 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1 = 0$
L(1) 7 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$
・・・・・・

＜推論＞

（３）①、②がζ(2)分割の直接的な最終の微分方程式ですが、これを変数変換（$x = 1/t^2$）するとチェビシェフの微分方程式に移行できます。実際、今回、チェビシェフの微分方程式から、変数変換を駆使して①と②を導きました。

　ということは、その類似が L(1)でもできないでしょうか。

なんらかの変数変換を行うことで（ζ(2)分割での $x = 1/t^2$ では駄目なのですが)、既に世に知られた微分方程式に還元できないか。[1],[2]の形の微分方程式は公式集で見ないものだが、それを知られている微分方程式に変換できないのでしょうか。もし知られた微分方程式に還元できれば、その過去の成果を利用できることになります。

すなわち今回（３）のテーマを解いた結果、L(1)分割の微分方程式[1]は、次の③のよく知られたガウスの超幾何微分方程式に移行（還元）できたというわけです。([1]の x を $x = (2t - 1)/i$ で変数変換すれば(i は虚数単位)、移行できます。t は x に戻しています)

そして、その解は（その１１２）で佐藤郁郎氏が言われた Goldberg 関係式に似たものになりました。

$$x(x-1)y'' - \{ 1-n - 2(1-n)x \}y' + n(n-1)y = 0 \quad \text{----③}$$

③は超幾何微分方程式の一種と考えられます。その理由は、次の④の超幾何微分方程式の一般形で、$a = -n$, $b = 1-n$, $c = 1-n$ とすると③になるからです。

$$x(x-1)y'' - \{ c - (a+b+1)x \}y' + aby = 0 \quad \text{----④}$$

④の解として知られる超幾何関数 $y = F(a, b; c; x)$において、$a = -n$, $b = 1-n$, $c = 1-n$ として求めた結果が③の解となります。それを以下に示します。例えば、L(1) 3 分割に対応するものが“n=3⇒“の場合となります。

＝＝＝

$x(x-1)y'' - \{ 1-n -2(1-n)x \}y' +n(n-1)y=0$ ----③

[③の解]

$n=1 \Rightarrow y=(x-1)^1=x-1$

$n=2 \Rightarrow y=(x-1)^2=x^2-2x+1$

$n=3 \Rightarrow y=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

$n=4 \Rightarrow y=(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

$n=5 \Rightarrow y=(x-1)^5=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

$n=6 \Rightarrow y=(x-1)^6=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$

・

・

＝＝＝

これらと上方の[1]or[2]の解を比較してください。＋－の符号の並び方が違っていることに気づきます。そして、この[③の解]は下記の Goldberg 関係式とほぼ同じです。交代級数の符号も（本質的に）同じです。ゼータは幾何学方面とも関係ありそうです。ゼータの分身たちは、対称性の泉から湧き上ってきているので関係していてもふしぎではありません。

（その１１２）から抜粋。http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/13936_b5.htm

****

以前にもお話したことがありますが、高次元空間のねじれを表現する際に出現する Hurley 方程式と Goldberg 関係式の関係に非常に似ています。

［１］Hurley 方程式（ねじれた後を表現する）

$3x^2+4x+3=0$

$4x^3+6x^2+6x+4=0$（既約ではない）

$5x^4+8x^3+9x^2+8x+5=0$

$6x^5+10x^4+12x^3+12x^2+10x+6=0$（既約ではない）

ねじれ角はこれらの最大固有値になります。

［２］Goldberg 関係式（ねじれる前を表現する）

$3a^2-3b^2+c^2=0$

$4a^2-6b^2+4c^2-d^2=0$

$5a^2-10b^2+10c^2-5d^2+e^2=0$

$6a^2-15b^2+20c^2-15d^2+6e^2-f^2=0$

これらは係数は二項係数、符号が交代で現れるというものです。

****

なお、超幾何関数 y＝F(a, b; c; x)は、超幾何級数と下記の関係で結ばれています。

$$\mathrm{F(a,b;c;x)} = 1 + \frac{\mathrm{a \cdot b}}{1 \cdot c}x + \frac{\mathrm{a(a+1)b(b+1)}}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \frac{\mathrm{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdot\cdot\cdot$$

ここで a, b, c が実数のとき、この級数は c-(a+b)>-1 という条件で $-1<x<1$ に対して収束します。

注記：じつは③, ④から a＝-n, b＝1-n, c＝1-n として y＝F(a, b; c; x)を計算すると、有限項の最終項が 0/0 の項になる所があり微妙な計算になります。しかしそれは 1 と解釈するべきとわかりました。超幾何関数の計算サイトの結果からわかり、またそこから得られた解が③を満足することから分かりました。

結局、L(1)分割では、[1]or [2]から③を経由して、y＝$(x-1)^n$ という単純な二項展開式に帰着されました。

ちなみにζ(2)分割（冒頭①、②のもの）では、よく知られたチェビシェフ多項式に帰着されたことは既に報告した通りです。チェビシェフ多項式も超幾何関数から得られます。

このように L(1)とζ(2)の両者でよく知られた多項式に行き着いたわけです。これでどちらもよく知られたものに還元できたので、当面の目標であった大テーマはできたかと思います。（やるべきことはまだ多くありますが）

それにしても L(1)n 分割が y＝$(x-1)^n$ という超単純なものに帰着されたのには驚きました。ですが、ゼータはシンプルできれいなので納得もしてしまいます。Goldberg 関係式から幾何学方面との関連が見えてきたこともうれしいことです。

＜参考文献＞

●「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳）
●「数学公式Ⅲ」（森口、宇田川、一松著、岩波書店）

以上。

2019.7.27　杉岡幹生