＜ ζ(2)１４分割⇒２８分割の分解 ＞

今回は、元の本流の道に舞い戻り、（その８５）の続きを行います。
ζ(2)の分岐構造のうち、１４分割の分身たち（１４分身）が２８分割の分身たち（２８分身）に分解する様子を確かめます。
すなわち以下の青太字の“ζ(2)１４分身⇒ζ(2)２８分身”を今回確かめます。（下記の構造の説明は前よりすこし簡潔にしました。）

※※

＜ ζ(2)分解構造 ＞

ζ(2)⇒ζ(2)２分身⇒ζ(2)４分身⇒ζ(2)８分身⇒ζ(2)１６分身⇒・・・
ζ(2)⇒ζ(2)３分身⇒ζ(2)６分身⇒ζ(2)１２分身⇒ζ(2)２４分身⇒・・・
ζ(2)⇒ζ(2)５分身⇒ζ(2)１０分身⇒ζ(2)２０分身⇒ζ(2)４０分身⇒・・・
ζ(2)⇒ζ(2)７分身⇒**ζ(2)１４分身⇒ζ(2)２８分身**⇒ζ(2)５６分身⇒・・・
・・・・・・・・・・・

このようにζ(2)の一つの分身が二つに（倍に）分解する。倍々ゲームで無限に分解（分岐）していきます。
厳密には予想ですが、間違いなくこのようになっています。

（注記）
ζ(2)⇒ζ(2)４分身⇒ζ(2)８分身⇒ζ(2)１６分身⇒・・・
ζ(2)⇒ζ(2)６分身⇒ζ(2)１２分身⇒ζ(2)２４分身⇒・・・
なども当然成り立ちますが、略しました。理由は、前者は上の全体の様子での１行目に含まれ、後者は２行目に含まれていて、表示する必要がないからです（冗長になるので略）。素数のケースだけ書けば十分です。
※※

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots=\pi^2/8$ は、ζ(2)と次の関係にあり、両者は本質的に等しいものです。

$$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots$$
$$=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)$$
$$=\zeta(2)-(1/2^2)\zeta(2)=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$$

それではまず Z(2)（つまりζ(2)）の１４分割と２８分割の分身たちを示します。１４分割は（その８５）で見たものですが、２８分割は今回はじめて示すものです。
＝＝

■Z(2)１４分割

A1 $=1+1/55^2+1/57^2+1/111^2+1/113^2+1/167^2+\cdots=(\pi/56)^2/\cos^2(27\pi/56)$
A2 $=1/3^2+1/53^2+1/59^2+1/109^2+1/115^2+1/165^2+\cdots=(\pi/56)^2/\cos^2(25\pi/56)$
A3 $=1/5^2+1/51^2+1/61^2+1/107^2+1/117^2+1/163^2+\cdots=(\pi/56)^2/\cos^2(23\pi/56)$
A4 $=1/7^2+1/49^2+1/63^2+1/105^2+1/119^2+1/161^2+\cdots=(\pi/56)^2/\cos^2(21\pi/56)$
A5 $=1/9^2+1/47^2+1/65^2+1/103^2+1/121^2+1/159^2+\cdots=(\pi/56)^2/\cos^2(19\pi/56)$

$A6 = 1/11^2 + 1/45^2 + 1/67^2 + 1/101^2 + 1/123^2 + 1/157^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(17\pi/56)$

$A7 = 1/13^2 + 1/43^2 + 1/69^2 + 1/99^2 + 1/125^2 + 1/155^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(15\pi/56)$

$A8 = 1/15^2 + 1/41^2 + 1/71^2 + 1/97^2 + 1/127^2 + 1/153^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(13\pi/56)$

$A9 = 1/17^2 + 1/39^2 + 1/73^2 + 1/95^2 + 1/129^2 + 1/151^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(11\pi/56)$

$A10 = 1/19^2 + 1/37^2 + 1/75^2 + 1/93^2 + 1/131^2 + 1/149^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(9\pi/56)$

$A11 = 1/21^2 + 1/35^2 + 1/77^2 + 1/91^2 + 1/133^2 + 1/147^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(7\pi/56)$

$A12 = 1/23^2 + 1/33^2 + 1/79^2 + 1/89^2 + 1/135^2 + 1/145^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(5\pi/56)$

$A13 = 1/25^2 + 1/31^2 + 1/81^2 + 1/87^2 + 1/137^2 + 1/143^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(3\pi/56)$

$A14 = 1/27^2 + 1/29^2 + 1/83^2 + 1/85^2 + 1/139^2 + 1/141^2 + \cdots = (\pi/56)^2/\cos^2(\pi/56)$

$A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8 + A9 + A10 + A11 + A12 + A13 + A14 = Z(2) = \pi^2/8$ となる。
ここで、A1, A2, ・・, A14 が Z(2)の１４分身である。

■Z(2)２８分割

$B1 = 1 + 1/111^2 + 1/113^2 + 1/223^2 + 1/225^2 + 1/335^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(55\pi/112)$

$B2 = 1/3^2 + 1/109^2 + 1/115^2 + 1/221^2 + 1/227^2 + 1/333^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(53\pi/112)$

$B3 = 1/5^2 + 1/107^2 + 1/117^2 + 1/219^2 + 1/229^2 + 1/331^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(51\pi/112)$

$B4 = 1/7^2 + 1/105^2 + 1/119^2 + 1/217^2 + 1/231^2 + 1/329^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(49\pi/112)$

$B5 = 1/9^2 + 1/103^2 + 1/121^2 + 1/215^2 + 1/233^2 + 1/327^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(47\pi/112)$

$B6 = 1/11^2 + 1/101^2 + 1/123^2 + 1/213^2 + 1/235^2 + 1/325^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(45\pi/112)$

$B7 = 1/13^2 + 1/99^2 + 1/125^2 + 1/211^2 + 1/237^2 + 1/323^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(43\pi/112)$

$B8 = 1/15^2 + 1/97^2 + 1/127^2 + 1/209^2 + 1/239^2 + 1/321^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(41\pi/112)$

$B9 = 1/17^2 + 1/95^2 + 1/129^2 + 1/207^2 + 1/241^2 + 1/319^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(39\pi/112)$

$B10 = 1/19^2 + 1/93^2 + 1/131^2 + 1/205^2 + 1/243^2 + 1/317^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(37\pi/112)$

$B11 = 1/21^2 + 1/91^2 + 1/133^2 + 1/203^2 + 1/245^2 + 1/315^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(35\pi/112)$

$B12 = 1/23^2 + 1/89^2 + 1/135^2 + 1/201^2 + 1/247^2 + 1/313^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(33\pi/112)$

$B13 = 1/25^2 + 1/87^2 + 1/137^2 + 1/199^2 + 1/249^2 + 1/311^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(31\pi/112)$

$B14 = 1/27^2 + 1/85^2 + 1/139^2 + 1/197^2 + 1/251^2 + 1/309^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(29\pi/112)$

$B15 = 1/29^2 + 1/83^2 + 1/141^2 + 1/195^2 + 1/253^2 + 1/307^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(27\pi/112)$

$B16 = 1/31^2 + 1/81^2 + 1/143^2 + 1/193^2 + 1/255^2 + 1/305^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(25\pi/112)$

$B17 = 1/33^2 + 1/79^2 + 1/145^2 + 1/191^2 + 1/257^2 + 1/303^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(23\pi/112)$

$B18 = 1/35^2 + 1/77^2 + 1/147^2 + 1/189^2 + 1/259^2 + 1/301^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(21\pi/112)$

$B19 = 1/37^2 + 1/75^2 + 1/149^2 + 1/187^2 + 1/261^2 + 1/299^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(19\pi/112)$

$B20 = 1/39^2 + 1/73^2 + 1/151^2 + 1/185^2 + 1/263^2 + 1/297^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(17\pi/112)$

$B21 = 1/41^2 + 1/71^2 + 1/153^2 + 1/183^2 + 1/265^2 + 1/295^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(15\pi/112)$

$B22 = 1/43^2 + 1/69^2 + 1/155^2 + 1/181^2 + 1/267^2 + 1/293^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(13\pi/112)$

$B23 = 1/45^2 + 1/67^2 + 1/157^2 + 1/179^2 + 1/269^2 + 1/291^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(11\pi/112)$

$B24 = 1/47^2 + 1/65^2 + 1/159^2 + 1/177^2 + 1/271^2 + 1/289^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(9\pi/112)$

$B25 = 1/49^2 + 1/63^2 + 1/161^2 + 1/175^2 + 1/273^2 + 1/287^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(7\pi/112)$

$B26 = 1/51^2 + 1/61^2 + 1/163^2 + 1/173^2 + 1/275^2 + 1/285^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(5\pi/112)$

$B27 = 1/53^2 + 1/59^2 + 1/165^2 + 1/171^2 + 1/277^2 + 1/283^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(3\pi/112)$

$B28 = 1/55^2 + 1/57^2 + 1/167^2 + 1/169^2 + 1/279^2 + 1/281^2 + \cdots = (\pi/112)^2/\cos^2(\pi/112)$

$\sum_{i=1}^{28} Bi$＝Z(2)＝π²/8 となる。ここで B1, B2, ・・, B28 が Z(2)の２８分身である。

念のため Excel マクロで、上記全ての左辺級数が右辺値に収束することを確認しました。さらに右辺値全ての和がπ²/8 に一致することも確認しました。

＝＝＝

２８分割の導出方法は以下の通りです（１４分割は（その８５）で示したので略します)。

＝＝＝

２８分割の導出過程を簡単に述べます。次のタンジェントの部分分数展開式を微分した式①を利用します。

$1/(1^2-x^2) +1/(3^2-x^2) +1/(5^2-x^2) +\cdot\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

上を１回微分すると次式①が得られる。

$1/(1^2-x^2)^2 +1/(3^2-x^2)^2 +1/(5^2-x^2)^2 +\cdot\cdot\cdot=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) + \mathrm{Others}(x)$ -----①

右辺の Others(x)は $\mathrm{Others}(x)=-(\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$ですが、無視してよい個所なので Others(x)としました。①の x に特定の値を代入することで、次のように Z(2)の２８分割の分割級数（分身たち）が求まります。

①の x に値 55/56 を代入すると、B1 が得られる。
①の x に値 53/56 を代入すると、B2 が得られる。
①の x に値 51/56 を代入すると、B3 が得られる。
①の x に値 49/56 を代入すると、B4 が得られる。
①の x に値 47/56 を代入すると、B5 が得られる。
①の x に値 45/56 を代入すると、B6 が得られる。
①の x に値 43/56 を代入すると、B7 が得られる。
①の x に値 41/56 を代入すると、B8 が得られる。
①の x に値 39/56 を代入すると、B9 が得られる。
①の x に値 37/56 を代入すると、B10 が得られる。
①の x に値 35/56 を代入すると、B11 が得られる。
①の x に値 33/56 を代入すると、B12 が得られる。
①の x に値 31/56 を代入すると、B13 が得られる。
①の x に値 29/56 を代入すると、B14 が得られる。
①の x に値 27/56 を代入すると、B15 が得られる。
①の x に値 25/56 を代入すると、B16 が得られる。
①の x に値 23/56 を代入すると、B17 が得られる。
①の x に値 21/56 を代入すると、B18 が得られる。
①の x に値 19/56 を代入すると、B19 が得られる。
①の x に値 17/56 を代入すると、B20 が得られる。
①の x に値 15/56 を代入すると、B21 が得られる。
①の x に値 13/56 を代入すると、B22 が得られる。
①の x に値 11/56 を代入すると、B23 が得られる。
①の x に値 9/56 を代入すると、 B24 が得られる。

①の x に値 7/56 を代入すると、 B25 が得られる。
①の x に値 5/56 を代入すると、 B26 が得られる。
①の x に値 3/56 を代入すると、 B27 が得られる。
①の x に値 1/56 を代入すると、 B28 が得られる。

注記：左辺は Z(2)分割級数だけを拾い、右辺はそれに対応する$(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)$の値だけを拾います（すなわち、左辺では Z(2)分割級数以外の級数を無視し、右辺では Others(x)の値は無視する。それで OK)。
＝＝

上記の結果から「１４分割の分身たちは、２８分割の分身たちに分かれる」ことが言えるのですが、見てみましょう。
どうなっているかというと、次のようになっています。

A1 ＝B1 +B28 ----[1]
A2 ＝B2 +B27 ----[2]
A3 ＝B3 +B26 ----[3]
A4 ＝B4 +B25 ----[4]
A5 ＝B5 +B24 ----[5]
A6 ＝B6 +B23 ----[6]
A7 ＝B7 +B22 ----[7]
A8 ＝B8 +B21 ----[8]
A9 ＝B9 +B20 ----[9]
A10＝B10 +B19 ----[10]
A11＝B11 +B18 ----[11]
A12＝B12 +B17 ----[12]
A13＝B13 +B16 ----[13]
A14＝B14 +B15 ----[14]

それぞれの分身がある規則に従って二つに分かれていることがわかります！　級数での成立は簡単にわかります（眺めればわかります)。

右辺値での成立は、次のようにすれば容易に確かめられます。三角関数において成立する次式を用います。
$1/\cos^2(\pi/2-2x) = (1/4)[1/\cos^2(\pi/2-x)+1/\cos^2(x)]$

この x にπ/112、3π/112、5π/112、7π/112、9π/112、11π/112、13π/112、15π/112、17π/112、19π/112、21π/112、23π/112、25π/112、27π/112 を代入することで、それぞれ上記右辺値での[1]～[14]の成立を確かめることができます。

以上より「１４個の分身が、２８個の分身に分かれる」ことが確認できました。このようにゼータでは一つの分身が二つに割れていきます。

2019.7.21　杉岡幹生