< ζ(2)分割の微分方程式 >

ζ(2)分割がチェビシエフの微分方程式に関係することはこれまで述べてきた通りですが、それは間接的な関係であり、直接的・最終的なものではありません。それが少し気になっていました。今回、直接的な最終形での微分方程式が発見できたので報告します。

結論を先に示すと、次のものになります。

ζ(2)n分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \quad \text{-----①}$$

(n=1, 2, 3, ...))

または

$$x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} \left\{ x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} (y/x^n) \right\} = -n^2(y/x^n) \quad \text{-----②}$$

①と②は似ても似つかぬものに見えますが、本質的に全く同じものです。②では微分の'を $\frac{d}{dx}$ で表現しています。

これがζ(2)分割での直接的・最終的な形の微分方程式となります。“直接的・最終的な”の意味がわからないと思いますので説明します。

これまで繰り返し次のように述べてきました。(その103)から抜粋。

=====

ζ(2)の分身を生む次の代数方程式に現われている左辺の多項式 f(x) は、第一種チェビシエフ多項式と“本質的に”等しい。

ζ(2) 1分割 ⇒ $x^2 - 2 = 0$

ζ(2) 2分割 ⇒ $x^2 - 8x + 8 = 0$

ζ(2) 3分割 ⇒ $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

ζ(2) 4分割 ⇒ $x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$

ζ(2) 5分割 ⇒ $x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$

ζ(2) 6分割 ⇒ $x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$

.....

上記左辺式を変数変換 ($x=1/t^2$) して得られる第一種チェビシエフ多項式 f(x) の $y=f(x)$ は、チェビシエフの微分方程式 $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y=0$ (n=0,1,2,...)の一連の解となる。上記一連の代数方程式の根(解)は、“全て実根”であり、その解はζ(2)の分身の値(特殊値)となる。例えば $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$ の三根は、Z(2)3分身の特殊値と一致する。

=====

このように $x=1/t^2$ と変数変換してチェビシェフに帰着できると書いてきました。上記一連の方程式の係数はチェビシェフ多項式と同じで似てはいますが、しかし変数が逆転している形であり、同じではないのです。

もう少し具体的に述べると、例えば、 $n=3$ でのチェビシェフの微分方程式 $(1-x^2)y'' - xy' + 9y=0$ の解は、 $y=32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ (右辺がチェビシェフ多項式) であって、ζ(2) 3分割に対応する $y=x^3 - 18x^2 + 48x - 32$ ではありません (似てはいますが・・・)。これが“直接的・最終的でない”の意味です。

このような状況なので (3分割の場合ならば) 次のステップとして、直接 $y=x^3 - 18x^2 + 48x - 32$ を解にもつ微分方程式を求めたい! となります。そして変数変換を駆使してチェビシェフの微分方程式から、求めたかった①、②を導くことができました。それが冒頭の結果というわけです。

①、②に関し、例えばζ(2) 3分割の場合、 $n=3$ として $y=x^3 - 18x^2 + 48x - 32$ を解に持ちます。読者も一度確認してみてください。

最後に (その 1 1 3) の L(1) の場合も合わせて、まとめておきます。

さらに漠然とした予想や構想が出たので <推論> として最後に書きました。

ζ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \quad \text{-----①}$$

(n=1, 2, 3, ...)

または

$$x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} \left\{ x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} (y/x^n) \right\} = -n^2 (y/x^n) \quad \text{-----②}$$

①と②は、本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下の ζ(2) n 分身の値を解に持つ方程式での $y=$ 左辺多項式を解にもつ。例えば ζ(2) 3分身の場合、 $n=3$ とした①または②は、 $y=x^3 - 18x^2 + 48x - 32$ を特殊解に持つ。

ζ(2) 1 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x - 2 = 0$

ζ(2) 2 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^2 - 8x + 8 = 0$

ζ(2) 3 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

ζ(2) 4 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$

ζ(2) 5 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$

ζ(2) 6 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$

ζ(2) 7 分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$

.....

L(1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=1, 2, 3, \dots)

または

$$(x^2 + 1)^n \frac{d}{dx} \left\{ (x^2+1)^{1-n} \frac{dy}{dx} \right\} = n(1-n)y \quad \text{-----}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下の L(1) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば L(1) 3 分身の場合、n=3 とした[1]と[2]は、 $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ を特殊解に持つ。

L(1) 1 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x - 1 = 0$

L(1) 2 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

L(1) 3 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

L(1) 4 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$

L(1) 5 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$

L(1) 6 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1 = 0$

L(1) 7 分身の値を解に持つ方程式 $\Rightarrow x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$

.....

< 推論 >

①と②を比べた場合、②の形に惹かれます。[1]と[2]では[2]の方に惹かれます。この形はゼータ関数の大事なことを表現しているように感じます。

②や[2]のような形の作用素を乗法型作用素と名付けます。掛け算のようにになっているからそう名付けたい。①や[1]は加法型作用素と名付けます。私独自の名称ですが、今後これを使っていきます。

①と[1]を比べてもあまりよくわかりませんが、②と[2]はどこか似ている感じもあります。

以下 3 点ほど推論を述べます。

(1) エルミート行列でもそうですが、この種の作用素 y =固有値 y の形は、“ y にある作用を加えて元に戻ってくる”ことを表しており、それは“群の操作”のような感じがします。巡回群と関係あるのかもしれませんが。

(2) ②と[2]を眺めていて、 $x\sqrt{x-1}$ や (x^2+1) が気になります。

$L(1)$ の $L(s)$ は虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ゼータです。ζ(2)のζ(s)は“仮想的な”実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{1})$ ゼータと考えられます。もしかすると (x^2+1) や $x\sqrt{x-1}$ は、2次体の $\sqrt{-1}$ や、 $\sqrt{1}$ (つまり1)に関係しているのではありませんか。

(3) ①、②がζ(2)分割の直接的な最終の微分方程式ですが、これを変数変換($x=1/t^2$)するとチェビシエフの微分方程式に移行できます。実際、今回、チェビシエフの微分方程式から、変数変換を駆使して①と②を導きました。

ということは、その類似が $L(1)$ でもできないのでしょうか。

なんらかの変数変換を行うことで(ζ(2)分割での $x=1/t^2$ では駄目なのですが)、既に世に知られた微分方程式に還元できないか。[1],[2]の形の微分方程式は公式集で見ないものだが、それを知られている微分方程式に変換できないのでしょうか。もし知られた微分方程式に還元できれば、その過去の成果を利用できることになります。

以上。

2019.7.15 杉岡幹生