

＜ ζ(2)の13分割 ＞

Z(2)すなわちζ(2)の13分割における13個の分割級数(分身たち)を求めましたので報告します。Z(2)は次の関係からζ(2)と本質的に同じものです。

$$\begin{aligned} Z(2) &= 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots \\ &= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \dots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \dots) \\ &= \zeta(2) - (1/2^2)\zeta(2) \\ &= (3/4)\zeta(2) = \pi^2/8 \quad \text{-----①} \end{aligned}$$

“Z()”は私が使っている記号で一般的なものではないので注意してください。

それではZ(2)13分割の13分身(分割級数)を示します。

=====

■Z(2)13分割

$$\begin{aligned} B1 &= 1 + 1/51^2 + 1/53^2 + 1/103^2 + 1/105^2 + 1/155^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(25\pi/52) \\ B2 &= 1/3^2 + 1/49^2 + 1/55^2 + 1/101^2 + 1/107^2 + 1/153^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(23\pi/52) \\ B3 &= 1/5^2 + 1/47^2 + 1/57^2 + 1/99^2 + 1/109^2 + 1/151^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(21\pi/52) \\ B4 &= 1/7^2 + 1/45^2 + 1/59^2 + 1/97^2 + 1/111^2 + 1/149^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(19\pi/52) \\ B5 &= 1/9^2 + 1/43^2 + 1/61^2 + 1/95^2 + 1/113^2 + 1/147^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(17\pi/52) \\ B6 &= 1/11^2 + 1/41^2 + 1/63^2 + 1/93^2 + 1/115^2 + 1/145^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(15\pi/52) \\ B7 &= 1/13^2 + 1/39^2 + 1/65^2 + 1/91^2 + 1/117^2 + 1/143^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(13\pi/52) \\ B8 &= 1/15^2 + 1/37^2 + 1/67^2 + 1/89^2 + 1/119^2 + 1/141^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(11\pi/52) \\ B9 &= 1/17^2 + 1/35^2 + 1/69^2 + 1/87^2 + 1/121^2 + 1/139^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(9\pi/52) \\ B10 &= 1/19^2 + 1/33^2 + 1/71^2 + 1/85^2 + 1/123^2 + 1/137^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(7\pi/52) \\ B11 &= 1/21^2 + 1/31^2 + 1/73^2 + 1/83^2 + 1/125^2 + 1/135^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(5\pi/52) \\ B12 &= 1/23^2 + 1/29^2 + 1/75^2 + 1/81^2 + 1/127^2 + 1/133^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(3\pi/52) \\ B13 &= 1/25^2 + 1/27^2 + 1/77^2 + 1/79^2 + 1/129^2 + 1/131^2 + \dots = (\pi/52)^2 / \cos^2(\pi/52) \end{aligned}$$

$B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 + B8 + B9 + B10 + B11 + B12 + B13 = Z(2) = \pi^2/8$ となります。

B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B10, B11, B12, B13がZ(2)の13分身です。

念のため、Excelマクロで数値検証を実行しましたが、全て左辺の級数は右辺値に収束しました。また右辺値に対して“B1+B2+B3+B4+B5+B6+B7+B8+B9+B10+B11+B12+B13”を計算すると、①の $\pi^2/8$ に一致しました。

=====

上の分割級数の導出過程を簡単に述べます。

三角関数タンジェントの部分分数展開式は次のものです。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$$

上式を1回微分して次式②を得ますが、これを使います。

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2 / \cos^2(\pi x/2) + \text{Others}(x) \quad \text{-----②}$$

ここで右辺の Others(x) はじつは $\text{Others}(x) = -(\pi/(8x^3)) \tan(\pi x/2)$ ですが、今回は無視してよい個所なので Others(x) としました。

②の x に特定の値を代入することで、Z(2)の分割級数が次々に求まっていきます。以下の通り。

- ②の x に 25/26 を代入すると、B1 が得られる。
- ②の x に 23/26 を代入すると、B2 が得られる。
- ②の x に 21/26 を代入すると、B3 が得られる。
- ②の x に 19/26 を代入すると、B4 が得られる。
- ②の x に 17/26 を代入すると、B5 が得られる。
- ②の x に 15/26 を代入すると、B6 が得られる。
- ②の x に 13/26 を代入すると、B7 が得られる。
- ②の x に 11/26 を代入すると、B8 が得られる。
- ②の x に 9/26 を代入すると、B9 が得られる。
- ②の x に 7/26 を代入すると、B10 が得られる。
- ②の x に 5/26 を代入すると、B11 が得られる。
- ②の x に 3/26 を代入すると、B12 が得られる。
- ②の x に 1/26 を代入すると、B13 が得られる。

注記：値を代入された②の左辺から L(1)分割級数も出るのでありますが、それは今回は興味がないので無視します。右辺からも左辺の L(1)分割級数に対応した値が Others(x) から出ますがそれも無視します。興味がないものは Others(x) に押し込んで無視するので。なぜこんなことをするかと言うと、L(3), と (4), L(5), と (6), L(7) ・ ・ の分割を求める際にこの方法を使うと、計算量を劇的に減らせるからです。と (2) 分割ではまだそれほど有難味はわかりませんが、n=3 以上でこのアイディアが絶大な威力を発揮します。

=====

このようにと (2) すなわち Z(2) の分身たちが求まりました。

式の素晴らしい秩序を味わってください。“ $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2/8$ ” の裏側に壮大な秩序が隠されているのです。この秩序は、際立った対称性から成る深いフラクタル構造から湧き出てきています。中学生でもできそうな計算で、ゼータの深い地点を見ることができます。読者もぜひ手計算してその絶対的な美を体感してください。

なお、B7 はじつは Z(2) そのもの となっていることにも着目ください。よく見ると Z(2) そのものですね。

以上。