＜　ζ(2)の１１分割　＞

Z(2)すなわちζ(2)の１１分割における１１個の分割級数（分身たち）を求めましたので報告します。Z(2)は次の関係からζ(2)と本質的に同じものです。

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots$

$=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)$

$=\zeta(2)-(1/2^2)\zeta(2)$

$=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$　-------①

“Z( )”は私が使っている記号で一般的なものではないので注意してください。

それでは Z(2)１１分割の１１分身(分割級数)を示します。

＝＝＝

■Z(2)１１分割

$B1=1+1/43^2+1/45^2+1/87^2+1/89^2+1/131^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(21\pi/44)$

$B2=1/3^2+1/41^2+1/47^2+1/85^2+1/91^2+1/129^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(19\pi/44)$

$B3=1/5^2+1/39^2+1/49^2+1/83^2+1/93^2+1/127^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(17\pi/44)$

$B4=1/7^2+1/37^2+1/51^2+1/81^2+1/95^2+1/125^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(15\pi/44)$

$B5=1/9^2+1/35^2+1/53^2+1/79^2+1/97^2+1/123^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(13\pi/44)$

$B6=1/11^2+1/33^2+1/55^2+1/77^2+1/99^2+1/121^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(11\pi/44)$

$B7=1/13^2+1/31^2+1/57^2+1/75^2+1/101^2+1/119^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(9\pi/44)$

$B8=1/15^2+1/29^2+1/59^2+1/73^2+1/103^2+1/117^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(7\pi/44)$

$B9=1/17^2+1/27^2+1/61^2+1/71^2+1/105^2+1/115^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(5\pi/44)$

$B10=1/19^2+1/25^2+1/63^2+1/69^2+1/107^2+1/113^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(3\pi/44)$

$B11=1/21^2+1/23^2+1/65^2+1/67^2+1/109^2+1/111^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(\pi/44)$

$B1+B2+B3+B4+B5+B6+B7+B8+B9+B10+B11=Z(2)=\pi^2/8$ となります。

B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B10, B11 が Z(2)の１１分身です。

念のため、Excel マクロで数値検証を実行しましたが、全て左辺の級数は右辺値に収束しました。
また右辺値に対して“B1 +B2 +B3 +B4 +B5+B6 +B7 +B8 +B9+B10 +B11”を計算すると、①の $\pi^2/8$ に一致しました。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上の分割級数の導出過程を簡単に述べます。
三角関数タンジェントの部分分数展開式は次のものです。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

上式を１回微分して次式②を得ますが、これを使います。

$$1/(1^2-x^2)^2+1/(3^2-x^2)^2+1/(5^2-x^2)^2+\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x) \qquad \text{-----②}$$

ここで右辺の Others(x)はじつは $\mathrm{Others}(x)=-(\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$ですが、今回は無視してよい個所なので Others(x)としました。

②の x に特定の値を代入することで、Z(2)の分割級数が次々に求まっていきます。以下の通り。
②の x に 21/22 を代入すると、B1 が得られる。
②の x に 19/22 を代入すると、B2 が得られる。
②の x に 17/22 を代入すると、B3 が得られる。
②の x に 15/22 を代入すると、B4 が得られる。
②の x に 13/22 を代入すると、B5 が得られる。
②の x に 11/22 を代入すると、B6 が得られる。
②の x に 9/22 を代入すると、B7 が得られる。
②の x に 7//22 を代入すると、B8 が得られる。
②の x に 5/22 を代入すると、B9 が得られる。
②の x に 3/22 を代入すると、B10 が得られる。
②の x に 1/22 を代入すると、B11 が得られる。

注記：値を代入された②の左辺から L(1)分割級数も出るのですが、それは今回は興味がないので無視します。右辺からも左辺の L(1)分割級数に対応した値が Others(x)から出ますがそれも無視します。興味がないものは Others(x)に押し込んで無視するのです。なぜこんなことをするかと言うと、高次のζ(4)や L(5)やζ(6)・・などを求める際にこの方法を使うと、計算量を劇的に減らせるからです。ζ(2)分割ではまだその有難味はわかりませんが、高次の計算ではこのアイディアが絶大な威力を発揮します。
＝＝

このようにζ(2)すなわち Z(2)の分身たちが求まりました。式の美しい秩序を味わってください。

単発的に見える“$1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots=\pi^2/8$”の裏側に壮大な秩序が隠されています。今回の１１分割はその一端を見ているにすぎず、ゼータの奥深いフラクタル構造からさまざまな分身たちが湧き出てきます。

ここで、B6 はじつは Z(2)そのものとなっていることにも注意してください。

$$B6=1/11^2+1/33^2+1/55^2+1/77^2+1/99^2+1/121^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(11\pi/44)$$

上は次のように変形できるので、これは冒頭の Z(2)そのものとなっています。

$$(1/11^2)(1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots)=(1/11^2)(\pi/4)^2/\cos^2(\pi/4)=(1/11^2)(\pi^2/8)$$

以上。

2019.6.8　杉岡幹生