＜ζ(2)４分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞ rev1.01

今回はζ(2)（つまりZ(2)）の４分身の値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）を求めます。

[Z(2)分割-実対称行列 予想]

「Z(2)のｎ分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列（エルミート行列）の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで、“ｎ分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を微分した次式に、m/(2n)を代入して求めたｎ分割のｎ個の分身たちを指す。(nは１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n−1)

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \cdots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) - (\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$$

$Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots = \pi^2/8$ は、ζ(2)と次の関係にあり、両者は本質的に等しいものです。なお“Z(s)”という記号は私が独自に使っているものです。

$$\begin{aligned}
Z(2) &= 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots \\
&= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 \cdots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \cdots) \\
&= \zeta(2) - (1/2^2)\zeta(2) \\
&= (3/4)\zeta(2) = \pi^2/8 \qquad \text{--------①}
\end{aligned}$$

以下、Z(2)の４分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。
はじめにZ(2)４分身を示します。（その１５）から抜粋。

＝＝＝

■Z(2)４分割

$$\begin{aligned}
B1 &= 1 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/31^2 + 1/33^2 + 1/4^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\{\cos(7\pi/16)\}^2 \\
B2 &= 1/3^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/35^2 + 1/45^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\{\cos(5\pi/16)\}^2 \\
B3 &= 1/5^2 + 1/11^2 + 1/21^2 + 1/27^2 + 1/37^2 + 1/43^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\{\cos(3\pi/16)\}^2 \\
B4 &= 1/7^2 + 1/9^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/39^2 + 1/41^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\{\cos(\pi/16)\}^2
\end{aligned}$$

$B1 + B2 + B3 + B4 = Z(2) = \pi^2/8$ である。これらB1, B2, B3, B4がZ(2)４分身である。

$1/\{\cos()\}^2$の部分を計算した結果は、以下の通り。

$$\begin{aligned}
(16/\pi)^2 B1 &= 1/\{\cos(7\pi/16)\}^2 = 8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{(2+\sqrt{2})} + 2\sqrt{(4+2\sqrt{2})} \\
(16/\pi)^2 B2 &= 1/\{\cos(5\pi/16)\}^2 = 8 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{(2-\sqrt{2})} - 2\sqrt{(4-2\sqrt{2})} \\
(16/\pi)^2 B3 &= 1/\{\cos(3\pi/16)\}^2 = 8 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{(2-\sqrt{2})} + 2\sqrt{(4-2\sqrt{2})} \\
(16/\pi)^2 B4 &= 1/\{\cos(\pi/16)\}^2 = 8 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{(2+\sqrt{2})} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

＝＝＝

Z(2)４分身の値 B1, B2, B3, B4 の $1/\{\cos()\}^2$ の部分を解にもつ代数方程式は次となります。

$x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$ ------②

②は $1/\{\cos(7\pi/16)\}^2$, $1/\{\cos(5\pi/16)\}^2$, $1/\{\cos(3\pi/16)\}^2$, $1/\{\cos(\pi/16)\}^2$ の四つを解に持ちます。B1, B2, B3, B4 すなわち $(\pi/16)^2/\{\cos(7\pi/16)\}^2$, $(\pi/16)^2/\{\cos(5\pi/16)\}^2$, $(\pi/16)^2/\{\cos(3\pi/16)\}^2$, $(\pi/16)^2/\{\cos(\pi/16)\}^2$ を解にもつ方程式を出すことも当然できますが、それと②は本質的に同じであり、よって②を採用します。これはL(1)ゼータでの哲学と同じであり、それと同じ方針で進めます。

まとめます。

****

＜Z(2)４分身の値を解にもつ代数方程式＞

$x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$ ------②

****

前回の２分身、３分身と今回の４分身、さらにそれ以降の代数方程式を並べるとそれらは第一種チェビシェフの多項式に対応するという面白い事実を（その８６）で見ました。それを再掲します。４分割で②が見える。

＝＝＝

$\zeta(2)$の分身を生む次の代数方程式に現われている左辺の多項式 f(x)は、第一種チェビシェフの多項式と本質的に等しい。

$\zeta(2)$１分割⇒ $x-2=0$

$\zeta(2)$２分割⇒ $x^2-8x+8=0$

$\zeta(2)$３分割⇒ $x^3-18x^2+48x-32=0$

$\zeta(2)$４分割⇒ $x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$

$\zeta(2)$５分割⇒ $x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512=0$

$\zeta(2)$６分割⇒ $x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048=0$

・・・・・・

これらの多項式 f(x)に対応した y＝f(x)は、チェビシェフの微分方程式の一連の解となる。上記方程式の根(解)は“全て実根”であり、その解は $\zeta(2)$の分身の値（特殊値）となる。

例えば”$x^3-18x^2+48x-32=0$”の三つの解は、$\zeta(2)$３分割の分身たちの特殊値と一致する。

＝＝＝

さて、②の方程式の解（Z(2)４分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）が存在するでしょうか？それは存在し、次となります。

$$G4_{Z(2)}=\begin{bmatrix} 8+4\sqrt{2} & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 8-4\sqrt{2} & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 8-4\sqrt{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 8+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ここで、$\alpha=4\sqrt{(2+\sqrt{2})}+2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$, $\beta=-4\sqrt{(2-\sqrt{2})}+2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$ ------③

この行列も、これまでの分身の行列と同じく、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。

この行列 $G4_{Z(2)}$ の固有方程式は $x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$ であり上記②に一致する。その四つの解（固有値）λ_1, λ_2, λ_3, λ_4は当然ながら Z(2) ４分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1=1/\{\cos(7\pi/16)\}^2=8+4\sqrt{2}+\alpha$に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2=1/\{\cos(5\pi/16)\}^2=8-4\sqrt{2}-\beta$に対応する固有ベクトル　$p_2=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_3=1/\{\cos(3\pi/16)\}^2=8-4\sqrt{2}+\beta$に対応する固有ベクトル　$p_3=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_4=1/\{\cos(\pi/16)\}^2=8+4\sqrt{2}-\alpha$に対応する固有ベクトル　$p_4=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

ここでα, βは③の値である。固有ベクトル p_1, p_2, p_3, p_4 は互いに直交していることを確認ください。

さらに L(1) ４分身のときと同様にして、$G4_{Z(2)}$ を Z(2) ４分身 B1, B2, B3, B4 で表現すると、次のようになる。

$$G4_{Z(2)}=(16/\pi\sqrt{2})^2\begin{bmatrix}B1+B4 & 0 & 0 & B1-B4\\ 0 & B2+B3 & -B2+B3 & 0\\ 0 & -B2+B3 & B2+B3 & 0\\ B1-B4 & 0 & 0 & B1+B4\end{bmatrix}$$

Z(2) ４分身たち B1, B2, B3, B4 によって見事に $G4_{Z(2)}$ が表現されました。簡明さに驚きます！
$B1+B2+B3+B4=Z(2)=\pi^2/8$ であることと合わせて、上記を味わってください。

以上。

Z(2) ４分身（つまり$\zeta(2)$ ４分身）の値を固有値にもつ実対称行列 $G4_{Z(2)}$と固有ベクトルが求まりました。
２分身、３分身のときと同じく、$G4_{Z(2)}$ もやはり右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっていることを確認ください。

以上。

2019.4.6　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述をを変更。文字フォントを変更。