

今回からリーマンゼータ ζ(s) の ζ(2) (つまり Z(2)) の分身たちの値を固有値に持つ実対称行列 (エルミート行列) を求めます。

[Z(2) 分割-実対称行列 予想]

「Z(2) の n 分身の特殊値を解にもつ代数方程式」=「実対称行列 (エルミート行列) の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで、“n 分身” の意味は、タンジェント部分分数展開式を微分した次式に、m/(2n) を代入して求めた n 分割の n 個の分身たちを指す。(n は 1 以上の整数。m=1, 3, 5・・・, 2n-1)

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2 / [\cos(\pi x/2)]^2 - \{\pi/(8x^3)\} \tan(\pi x/2)$$

$Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots = \pi^2/8$ は、リーマンゼータ ζ(2) と次の関係にあり、両者は本質的に等しいものです。なお“Z(s)” という記号は私が独自に使っているものです。

$$\begin{aligned} Z(2) &= 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots \\ &= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \dots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \dots) \\ &= \zeta(2) - (1/2^2) \zeta(2) \\ &= (3/4) \zeta(2) = \pi^2/8 \quad \text{-----①} \end{aligned}$$

さて、Z(2) の 2 分身、3 分身の値を固有値として持つ実対称行列 (エルミート行列) を求めていきたい。はじめに Z(2) 2 分身と 3 分身を示します。(その 15)、(その 31) から抜粋。

=====

■Z(2) 2 分割

$$\begin{aligned} A1 &= 1 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/23^2 + \dots = (\pi/8)^2 / \{\cos(3\pi/8)\}^2 \\ A2 &= 1/3^2 + 1/5^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/21^2 + \dots = (\pi/8)^2 / \{\cos(\pi/8)\}^2 \end{aligned}$$

$$A1 + A2 = Z(2) = \pi^2/8 = Z(2) \text{ である。}$$

$1/\{\cos(\cdot)\}^2$ の部分は次の通り。

$$1/\{\cos(3\pi/8)\}^2 = 4 + 2\sqrt{2}, \quad 1/\{\cos(\pi/8)\}^2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

■Z(2) 3 分割

$$\begin{aligned} B1 &= 1 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/35^2 + \dots = (\pi/12)^2 / \{\cos(5\pi/12)\}^2 \\ B2 &= 1/3^2 + 1/9^2 + 1/15^2 + 1/21^2 + 1/27^2 + 1/33^2 + \dots = (\pi/12)^2 / \{\cos(3\pi/12)\}^2 \\ B3 &= 1/5^2 + 1/7^2 + 1/17^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/31^2 + \dots = (\pi/12)^2 / \{\cos(\pi/12)\}^2 \end{aligned}$$

$$B1 + B2 + B3 = \pi^2/8 = Z(2) \text{ である。}$$

$1/\{\cos(\pi/12)\}^2$ の部分は次の通り。

$$1/\{\cos(5\pi/12)\}^2 = 8 + 4\sqrt{3}, \quad 1/\{\cos(3\pi/12)\}^2 = 2, \quad 1/\{\cos(\pi/12)\}^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

=====

Z(2) 2分身の値 A1, A2 の $1/\{\cos(\pi/12)\}^2$ の部分を解にもつ代数方程式は次となります。

$$x^2 - 8x + 8 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

②は $1/\{\cos(3\pi/8)\}^2$ と $1/\{\cos(\pi/8)\}^2$ を解に持ちます。 $(\pi/8)^2/\{\cos(3\pi/8)\}^2$ と $(\pi/8)^2/\{\cos(\pi/8)\}^2$ を解にもつ方程式を出すことも当然できますが、それと②は本質的に同じなので②を採用します。これは少し前に見た L(1) 分身での哲学と同じであり、以下同じ方針で進めます。

同様に、Z(2) 3分身の値 $1/\{\cos(5\pi/12)\}^2$ 、 $1/\{\cos(3\pi/12)\}^2$ 、 $1/\{\cos(\pi/12)\}^2$ を解にもつ (②の形に対応する) 代数方程式を求めると次となる。

$$x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{3}$$

まとめます。

<Z(2) 2分身の値を解にもつ代数方程式>

$$x^2 - 8x + 8 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

<Z(2) 3分身の値を解に持つ代数方程式>

$$x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{3}$$

さらに4分割、5分割・・・の値を解にもつ方程式を並べると、それらは第一種チェビシェフの多項式に対応するという興味深い事実を(その86)で見たのでした。再掲すると次の通り。

=====

ζ(2)の分身を生む次の代数方程式に現われている左辺の多項式 $f(x)$ は、第一種チェビシェフの多項式と本質的に等しい。

$$\zeta(2) \text{ 1分割} \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 2分割} \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 3分割} \Rightarrow x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 4分割} \Rightarrow x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 5分割} \Rightarrow x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 6分割} \Rightarrow x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$$

.....

これらの多項式 $f(x)$ に対応した $y=f(x)$ は、チェビシェフの微分方程式の一連の解となる。上記方程式の根(解)は“全て実根”であり、その解は ζ(2)の分身の値(特殊値)となる。

例えば” $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$ ”の三つの解は、ζ(2)3分割の分身たちの特殊値と一致する。

=====

さて、私たちの最大の興味は上の②、③の方程式の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）が存在するか？ということです。それは存在し、以下の通りとなる。

まず $Z(2)$ 2 分身の値を固有値としてもつ実対称行列は、次のものです ($G_{2_{Z(2)}}$ の G_2 の 2 は 2 次を表す)。

$$G_{2_{Z(2)}} = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

この行列の固有方程式は、 $x^2 - 8x + 8 = 0$ であり上記の②に一致します。その二つの固有値 λ_1, λ_2 は当然ながら $Z(2)$ 2 分身の値（特殊値）に一致する。固有値とその固有ベクトルを以下に示す。

$$\text{固有値 } \lambda_1 = 1 / \{\cos(3\pi/8)\}^2 = 4 + 2\sqrt{2} \text{ に対応する固有ベクトル } p_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = 1 / \{\cos(\pi/8)\}^2 = 4 - 2\sqrt{2} \text{ に対応する固有ベクトル } p_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

固有ベクトル p_1, p_2 は互いに直交していることを確かめてください。固有ベクトルは規格化されている。

次に $Z(2)$ 3 分身の値を固有値としてもつ 3 次実対称行列 $G_{3_{Z(2)}}$ を示す。次のものです。

$$G_{3_{Z(2)}} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 4\sqrt{3} & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

きれいな形です。 G_3 は (G_2 も) 右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。

$G_{3_{Z(2)}}$ の固有方程式は、 $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$ であり、上方の③に一致します。その三つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は当然ながら $Z(2)$ 3 分身の値（特殊値）に一致する。固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

$$\text{固有値 } \lambda_1 = 1 / \{\cos(5\pi/12)\}^2 = 8 + 4\sqrt{3} \text{ に対応する固有ベクトル } p_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = 1 / \{\cos(3\pi/12)\}^2 = 2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_3 = 1 / \{\cos(\pi/12)\}^2 = 8 - 4\sqrt{3} \text{ に対応する固有ベクトル } p_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

固有ベクトル p_1, p_2, p_3 は互いに直交していることを確かめてください。
以上。

このように $Z(2)$ 2 分身、3 分身の値を固有値にもつ実対称行列（エルミート行列）が求まりました。
 $Z(2)$ 4 分身は、次回以降見ていきます。

最後に $L(1)$ の場合と対比して、気づいたことをメモしておきます。

=====

● $L(1)$ の場合と同様、 $\zeta(2)$ （つまり $Z(2)$ ）でも対応する行列は、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっている。この行列は対称行列よりもさらに高い対称性を有するものと思われる。ゼータ分解構造において厳として存在する際立った対称性が表現されているように感じる。

●現時点で $L(1)$ 2 分身／3 分身／4 分身／5 分身と、 $\zeta(2)$ 2 分身／3 分身／4 分身の実対称行列が求まっている。これらで $L(1)$ と $\zeta(2)$ の固有ベクトルは一致した！ 任意 n 分身でも一致すると思われる。

例えば $L(1)$ 4 分身の四つの固有ベクトルと、 $\zeta(2)$ （つまり $Z(2)$ ）4 分身の四つの固有ベクトルは一致する。

●上記分身たちの実対称行列の“逆行列”を求めたところ、これも右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となった。逆行列はすこし後に示したい。

●求めた実対称行列の固有方程式は、それを“行列の等式”として見ても成り立っているようである。

以下、具体的に説明する。

$\zeta(2)$ 2 分身の実対称行列は次の $G_{Z(2)}$ と今回わかった。固有方程式は $x^2 - 8x + 8 = 0$ である。

$$G_{Z(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

「もしかしたら $G_{Z(2)}$ 行列を $x^2 - 8x + 8 = 0$ の x として放り込めば式は成り立つのではないかな？ すなわち、 $(G_{Z(2)})^2 - 8 G_{Z(2)} + 8E = 0$ という式が成立するのではないかな？」とふと思った（ E は単位行列）。確認すると、成り立っていた。他の分身の場合でも成り立っている。

この法則？は対称行列であれば成り立つようである。“普通の”対称行列で、何個な手計算したが、どれも成り立っている。おそらく対称行列での既出の定理として存在するはずである。・・・そして、ここまで書いてきて、突然証明に気づいた。上は普遍的に成り立っている。証明は略すが簡単である（ヒント $G^2 p = \lambda p$ の関係からすぐわかる）。この定理「対称行列の固有方程式は、その行列の等式としても成り立つ」は、どこかで役立ちそうである。

=====

以上。

2019. 3. 31 杉岡幹生