

重心¹を定義する「古畑の定理」

単純閉折れ線による一般の n 角形 ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) において、それを切らない直線 l を考える。

頂点 $A, B, C, D, \dots$ と、重心 G (n 角形の全頂点の座標の平均) から直線 l におろした垂線の足をそれぞれ $A', B', C', D', \dots, G'$ とする。このとき、

$$AA' + BB' + CC' + DD' + \dots = nGG'$$

即ち、 n 角形の頂点と直線 l との距離の総和は、その重心と直線 l との距離の n 倍に等しい。

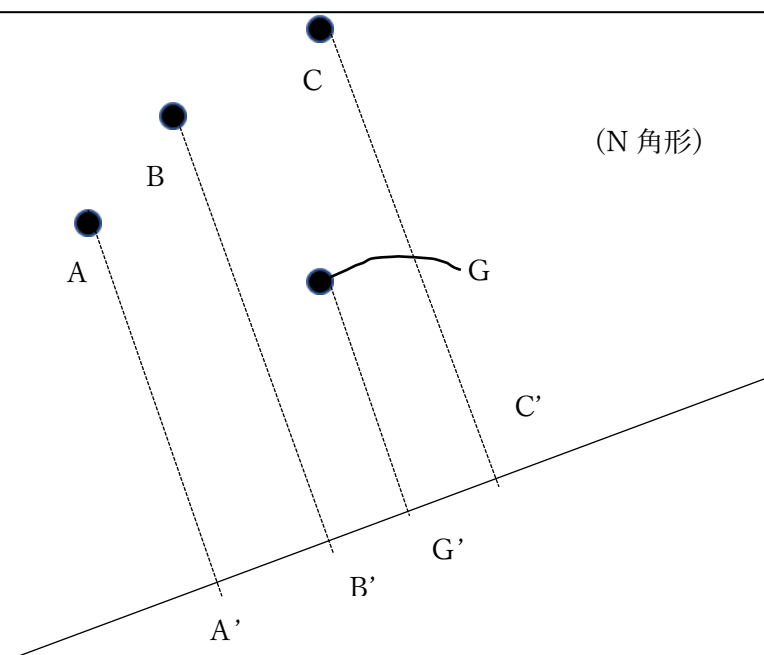


図1 古畑の定理の図

[証明]

n 角形の重心を原点として xy 座標平面上で n 角形を表し、直線 l を $ax+by+c=0$ とする。

$A(A_1, A_2), B(B_1, B_2), C(C_1, C_2), \dots$ とのように、頂点の座標をおくと、点と直線の距離の公式より

$$AA' = \frac{|aA_1 + bA_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, BB' = \frac{|aB_1 + bB_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, CC' = \frac{|aC_1 + bC_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dots$$

$$GG' = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

¹ 2次元平面上では物理的重心と数学的重心が等しいものとした。

直線 l が n 角形を切らないことで、 aA_1+bA_2+c , aB_1+bB_2+c , aC_1+bC_2+c , $\dots$ の符号が全て同じになる²ので、

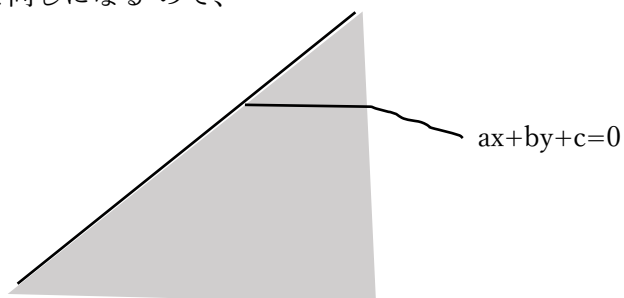


図2 $ax+by+c \leq 0$ で表される点 (x, y) の存在領域

$$AA'+BB'+CC'+\dots$$

$$= \frac{|aA_1+bA_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{|aB_1+bB_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{|aC_1+bC_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dots$$

$$= \frac{|a(A_1+B_1+C_1+\dots)+b(A_2+B_2+C_2+\dots)+c+c+c+\dots|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|n \times c|}{\sqrt{a^2+b^2}}^3$$

$$= n \times \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

nOO'

よって成立。これを「古畑の定理」と名付ける。

重心の定義は多数あるが、この「古畑の定理」は、多角形の重心を定義する新しい方法である。

² 直線 l が n 角形を切らないことで、その全頂点は $ax+by+c \geq 0$ または $ax+by+c \leq 0$ の領域に含まれることになるため。その領域に関しては図2参照。

³ n 角形の重心を原点に xy 座標平面を定義したことで、 n 角形の頂点の x, y 座標の各々の総和はゼロになる。