

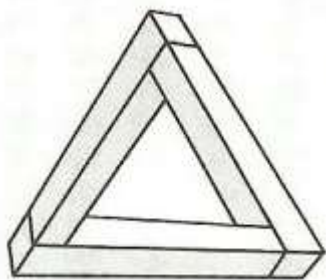
ペンローズの三角形について (4)

中川宏

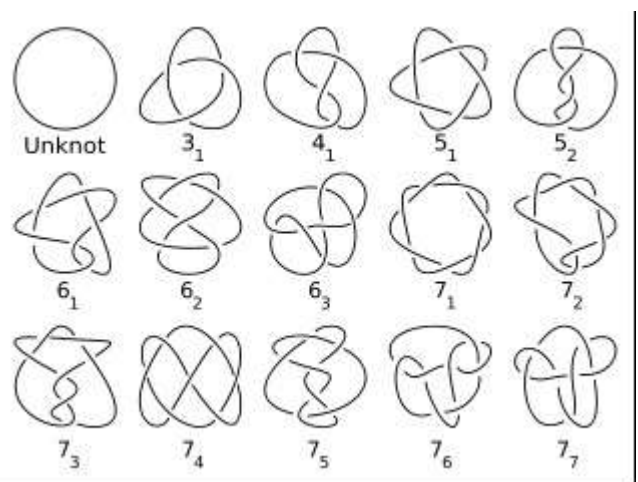
メビウスの帯1本からなるメビウス角柱多面体

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回 転対称	メビウス面 の節数	メビウス面 の本数
凹デルタ10面体 (開重4角錐)	15	60	3, 4, 6	2	60	1
凹デルタ18面体 (開重8角錐)	27	118	3, 4, 6	2	118	1
(開重4n角錐)	12n+3	4(12n+3)	3,4,6	2	4(12n+3)	1
凹デルタ14面体 (テトラタワー6)	21	88	3, 4, 5, 6,	1	88	1
凹デルタ26面体 (テトラタワー12)	39	156	3, 4, 5, 6,	1	156	1
(テトラタワー6n)	18n+3	4(18n+3)	3,4,5,6	1	4(18n+3)	1

メビウスの帯1本からなるメビウス角柱多面体はこれだけなのか、またなぜこれらのメビウス角柱多面体は1本のメビウスの帯となるのかということについては、いまだに見当もつかない。
そこで、ふたたびペンローズの三角形のメビウス角柱体にもどって、1本のメビウスの帯がどのように角柱三角形をなしているのか調べてみた。



メビウス角柱三角形の稜線に沿って、切り開いてみた。



三角形の頂点部分の帯が60度の角度がついているところはまっすぐに修正しているが、これはまず、何らかの結び目であることがわかった。7つの交点以下の結び目一覧で探してみると、鏡像になっているが、右下の 7_7 に該当するようである。

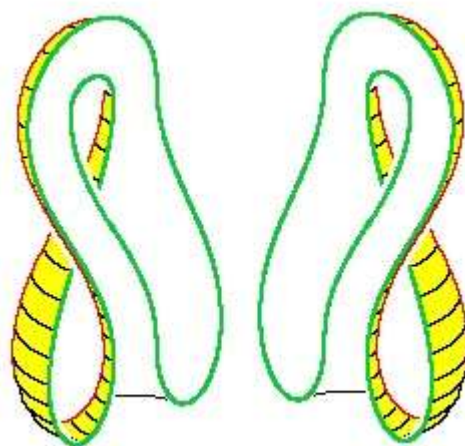
次に、この1本のメビウスの帯を一か所切断して、何回ねじってあるのかを調べてみた。初めてのことでやり方がわからなかったが、切り口の両端の向きを変えずに、2度結び目をくぐらせて結び目のない状態にして、10回戻ったらまっすぐな帯になった。メビウスの帯においては、1回戻るとするのは180°回すことである。また、メビウスの帯のばあいと比較の対象はねじりのない円環であるが、円環を切断して平らな帯にすると2回戻りが必要になる。つまり平らな帯にしないで円環にするには2回戻りが必要ないわけなので、じっさいは8回の戻りがあったと思われる。ペンローズの三角形を90度ねじった角柱で作ると、12節のメビウスの帯となるので単純計算すると180度×6回のねじりとなるが、さらに円環にするために2回戻りが必要があるので合計8回のねじりということであろう。

いいかえると、8回戻って 7_7 の結び目を持つメビウスの帯の縁をうまく貼り合わせれば、ペンローズの三角形ができる、ということになる。

メビウスの帯については、 m 回ねじった帯をハサミで n 等分すれば意外な帯ができることや、2つの向きの違うメビウスの帯を貼り合わせればクラインの壺となることなどが知られている。

半回転の数(m)	切断回数	切断位置 n 等分	出来る帯の長さ・戻れ	本数
1	1	2	$2L \cdot 4m$	1
1	1	3	$2L \cdot 4m$ $L \cdot m$	1 1
2	1	2	$L \cdot 2m$	2
3	1	2	$2L \cdot 8m$	1
3	1	3	$2L \cdot 6m$ $L \cdot 3m$	1 1

ペンローズの三角形は穴1つのトーラス、メビウス角柱多面体は複数の穴のトーラスと観ることもできるし、全てのメビウス角柱多面体が1本ないし複数のメビウスの帯に切り分けられるのであるから、メビウス角柱多面体は、<メビウスの帯>と<結び目>と<トーラス>が絡み合った領域の問題といえそうだ。



クラインの壺を縦に割ったところ