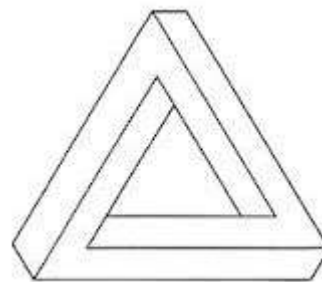
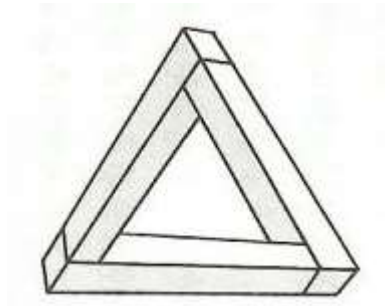


ペンローズの三角形について

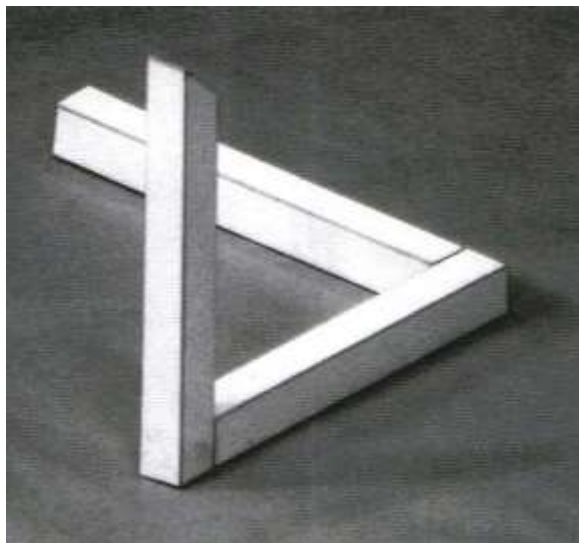
中川宏

島根県津和野市出身の画家・安野光雅の「空想の絵本」のなかに、ペンローズの三角形をもとにして、3本の木材を組み合わせたものがあった。そのものは載せられないので、イメージ図しか紹介できない。



本物をもっとリアルに角材の木肌が描かれている。

この実物を木材で作ってみたいと思って調べてみたのだが、いわゆるトリックアートのようなものしか見つからなかった。



ほんとうにこういうものしかできないのだろうかという疑問がわいた。

厚紙で試行錯誤の末、次のようにすればできることが分かった。



ペンローズの三角形の頂点の接具合を忠実に再現するには、材料の角材をねじることが必要であった。それぞれの角材の両端について90度のねじりが加えてある。そこでメビウスの帯と共通性がありそうだと思当がついた。

Wikipedia を調べてみると、「ペンローズの三角形の面を追いかけていくと、3重のメビウスの帯になっていることがわかる」という記述が見つかった。ところが、じっさいに作った模型で面を追って行ってみると4周で出発点にもどる。変だなと思って何度も確かめたがやはり4周で間違いない。考えてみると、角材は四角柱だから、もし3周でもどるなら、1面は通らないところがあることになるから、やはり3周というのは間違いのようだ。出典は特に書かれていなかったが、Wikipedia 英語版の誤りをそのまま翻訳したようだ。3周だと勘違いする原因は容易に推測できる。ペンローズの三角形の絵を見て、面をたどっていく際に、描かれていない裏側には1面しかないと思なしたに違いない。いいかえると四角柱ではなく、三角柱だとみなしてしまったということだ。

ともあれ Wikipedia 上で10年以上訂正されずにきた誤りに気付くことができたことは、今回模型を作ってみた甲斐があったといえる。

最近手に入れた「別冊サイエンス・数学ゲームⅢ」(マーチン・ガードナー著、一松信訳、1981年)を読んでみるとちょうど、「メビウスの帯」という項目があった。「過去15年間にわたって、私は読者から独立に、メビウスの帯は実はねじれた角柱であるということを指摘したり、その角柱の断面を任意の辺をもった正多角形に一般化したりした手紙を数十通受け取ってきた」と述べて、マーチン・ガードナーはn角柱をk回ねじった「柱状環」について考察している。それに従えば、ペンローズの三角形は四角柱を3回ねじった柱状環とみなすことができるのであるから、面数は1であり、三角形を4周する間に四角柱の4面すべてをまわって元に戻ることになる。

さいごに、ペンローズの三角形が見る人に違和感を与える理由を考えてみたい。

1回ねじった四角柱を3本組み合わせたものを素直に描くと右の図のようになる。このとき括弧でくくった数字の頂点は重なって隠れている。この重なりができるだけ少なくなるように書き表した図が左のペンローズの三角形であるといえよう。そこには視点を移動させて初めて見える光景が組み込まれているために、遠近法に慣れた目には違和感をよびおこすが、ねじれた図形をわかりやすく描く図法としては、これに勝る方法はないと思える。

