

多面体の分類について（その2）

中川宏

宮崎興二先生の「多面体百科」を拝読して私がもっとも驚いたのは、「切稜多面体」（130ページ）という項目が登場したことです。その直前の「切頂多面体」と対をなすかのように取り上げられていますが、おそらくほとんどの人にとって耳慣れない用語ではないかとおもいます。

英訳は **Edge-truncated Polyhedron** とされていますので、3年前にインターネット上の辞書サイト **Wikipedia** の英語版にあらわれた **Chamfer(geometry)** とは直接の関係はないようですが、ほぼ同時期に英語圏でも国内でも、幾何学の分野に「切稜」という新たな概念が定着したことを喜ばずにはられません。

しかも、宮崎先生の「切稜多面体」の項では、英語版 **Wikipedia** にはみられない、より深い多面体の関係が考察されています。立方体を切稜すると切稜立方体ができ、さらに切稜を最大限まで推し進めると菱形十二面体となる、ということは「多面体木工」でも紹介してきたトピックですが、立方体を含めてすべての正多面体を極限まで切稜したらどうなるのか、ということが石井源久さん原案・作図の図解とともに明示されています。中間段階を省略して始点と終点を示すと、

正四面体→立方体

立方体→菱形十二面体

正八面体→菱形十二面体

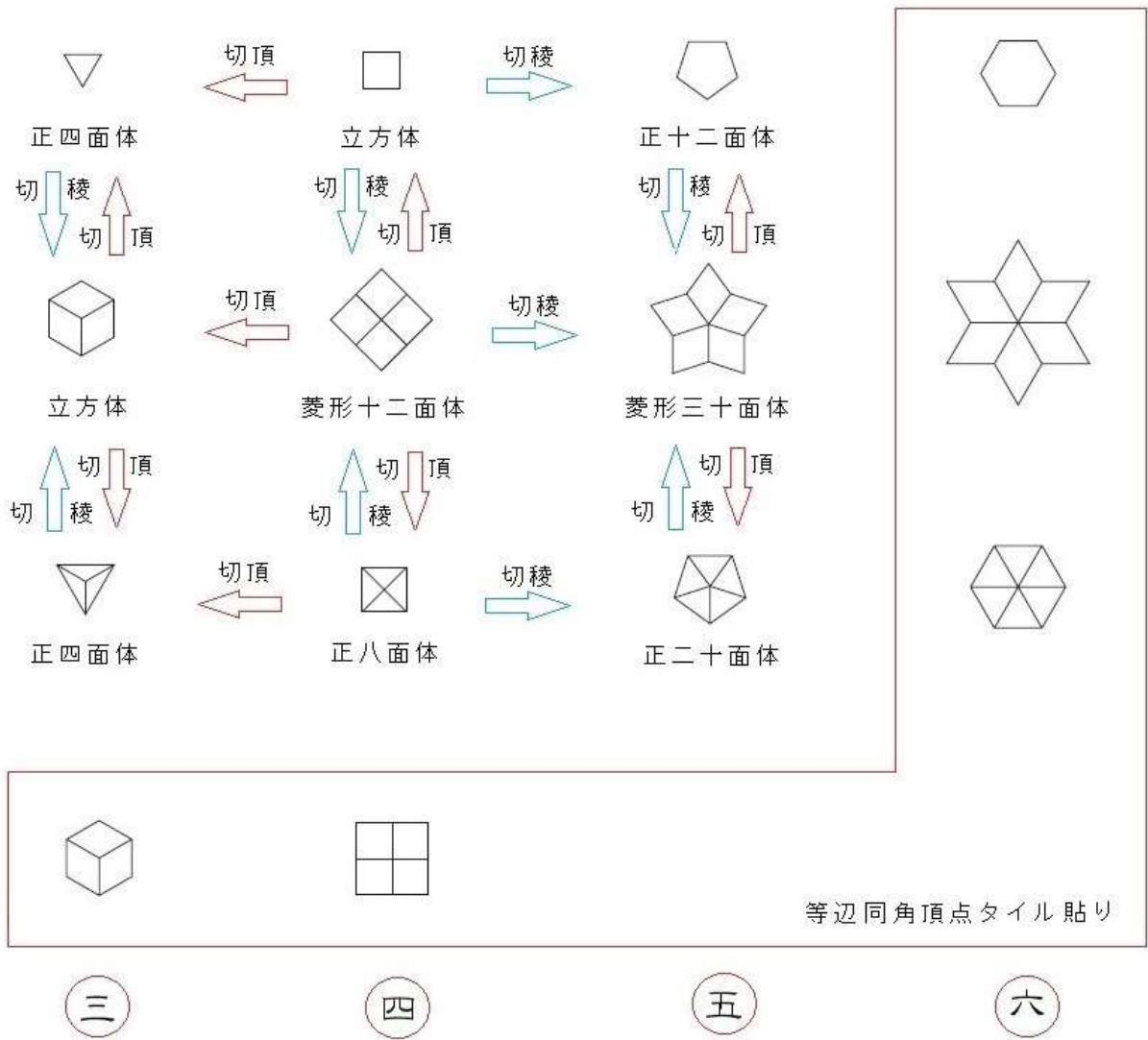
正十二面体→菱形三十面体

正二十面体→菱形三十面体

となります。

私自身は、菱形三十面体の作り方を模索した「多面体木工(寄贈限定版)」（2006年）当時、正二十面体を切頂して、いいかえると正十二面体を切稜して、さらに切稜することによって菱形三十面体を作る方法を紹介したことはありましたが、正四面体を極限まで切稜することを発想したことはありませんでした。これには驚きました。

そこで、「多面体百科」の切頂多面体と切稜多面体の両項および「正多面体を解く」（一松信著）に書かれてある事柄を多面体木工の観点から総合して図にしてみました。



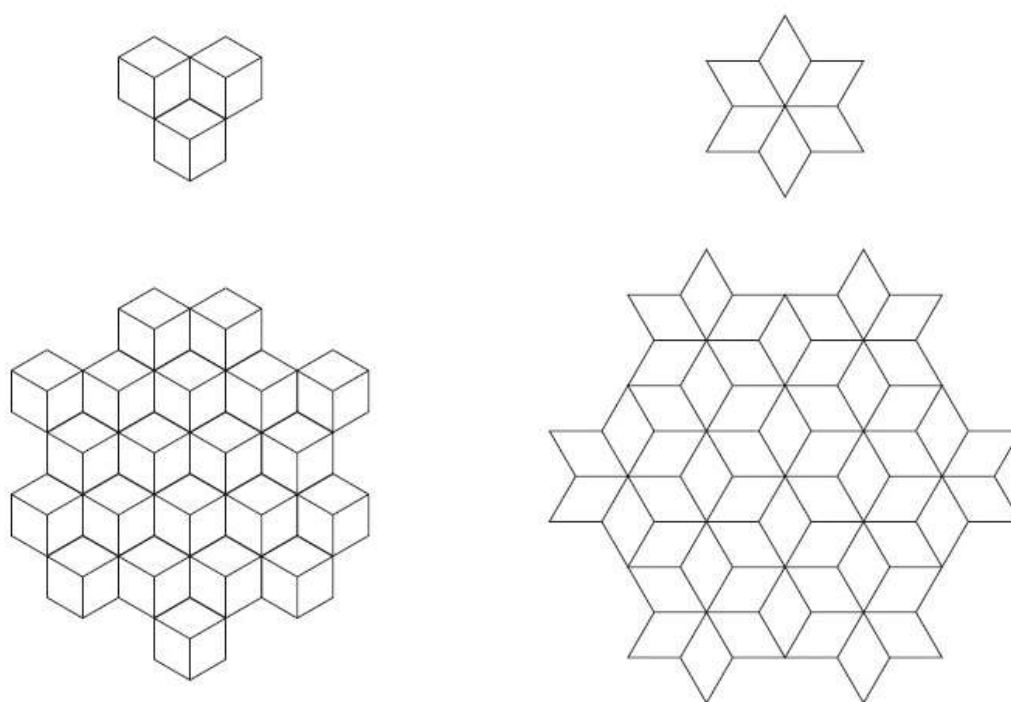
このように一覧にしてみると、幾何学の常識からすれば、1段目と3段目のたがいに双対関係をなす正多面体・正タイル貼りに挟まれて2段目にある菱形十二面体・菱形三十面体・菱形タイル貼りは一見異色な印象です。しかしデザインとして見るならば、2段目の図形を1段目の図形で切り取ると3段目の図形になるという整然とした配置になっていることに思いがけない感動を覚えます。

矢印の向きをたどると、双対の正多面体への変形というのは、上からでも下からでも切稜と切頂という加工の組み合わせであることがわかります。また菱形多面体から上へ向かう切頂と下へ向かう切頂とでは、加工の対象とする頂点の価数が異なること。つまり菱形十二面体から立方体への切頂は4価の頂点であるのにたいして、正八面体への切頂は3価の頂点、また菱形三十面体から正十二面体への切頂は5価の頂点であるのに対して、正二十面体への切頂は3価の頂点であることもわかります。このように考えていくと、双対関係をなす正多面体両者の性質を併せ持つ要の立体として、立方体を含む菱形多面体が浮かび上がってきます。佐藤郁郎先生が、菱形十二面体は4次元立方体の3次元投影図形、菱形三十面体は6次元立方体の3次元投影図形と教えてくださることともつながってくるような気がします。

この点について考えるうえで有益な項目も「多面体百科」にはあります。「準正多面体」の項です。そこには、準正多面体 (Semi-Regular Polyhedron) とよばれる立方八面体と十二・二十面体の、それぞれ

れの双対である菱形十二面体と菱形三十面体とを、ケプラーがハーフ正多面体（Half Regular Polyhedron）と呼んだことが紹介されています。それについてはクロムウェルの「多面体」がくわしく、ケプラーがこの2種類の菱形多面体を半正多面体（Quasi-regular Polyhedron）よりも正多面体に近い存在として位置づけようとしたことが記されています。クロムウェルによればケプラーの「ハーフ正多面体」の定義は成功していると言えないそうですが、上のように正多面体相互の関係を切稜と切頂を軸として理解する限り、ケプラーのいわんとしたことの意義は十分にくみ取れるのではないかと思います。

次に、菱形タイル貼りについて考えてみたいと思います。上の表では、2段目の右端と4段目の左端に分かれてありますが、敷き詰めてみると次の図のように同じものであることがわかります。



上の図の左は3回対称性をもつ頂点を中心にして、右の図は6回対称性を持つ頂点を中心にして描いた違いがあるだけで、両方の性質を持つ同一の菱形タイルです。

正タイルの3種類における頂点の対称性は、三角格子が6回、正方格子が4回、六角格子が3回ですから、菱形タイル貼りの対称性は2種類の正タイル貼り、三角格子と六角格子の両方の特徴を兼ね備えていると言ってよいでしょう。ちなみに半正タイル貼りのなかで頂点の対称性をもっとも高いのが、2回対称性を持つ和名「かごめ」の三角・六角格子ですが、その双対が菱形タイル貼りであることが、「多面体百科」の155ページに示されています。

ケプラーであれば、この菱形タイルは **Half Regular tiling** と呼んだかもしれませんが、単一の等辺多角形からなり、頂点には同じ大きさの角が集まるという意味で、とりあえずここでは「等辺同角頂点タイル貼り」としておきます。