1 の n 乗根について

pon

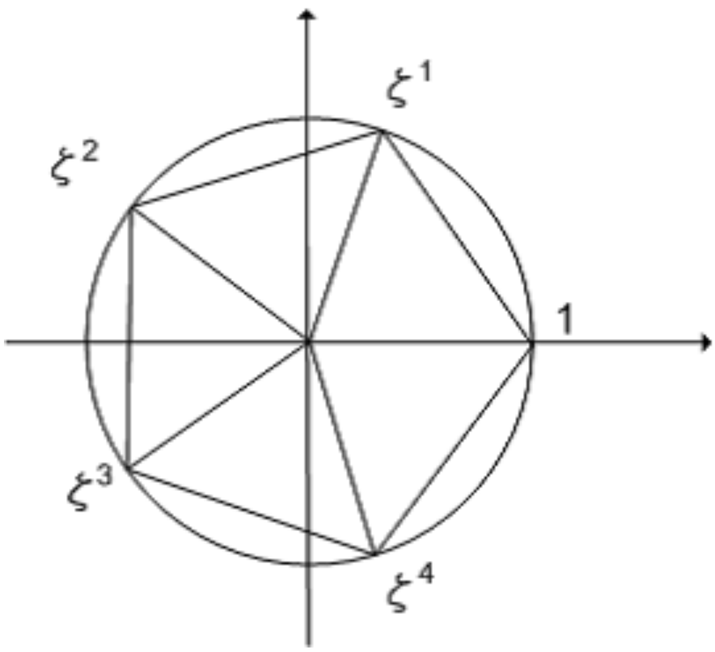
1　はじめに

1 の n 乗根について、特に 1 の n 乗根の和について書きたいと思います。著者の考えたままに書いているので、整った文章にはなっていませんが、ご了承ください。

2　1 の n 乗根の和

複素平面で考えてみると明らかに 0 になります。

例 2.1 1 の 5 乗根の場合



ですが、割にきれいな証明を思いついたので、少し書いてみます。

定理 *2.2* $n \in \mathbb{N}$ で、$n \geqq 2$ ならば、

$$\sum_{k=0}^{n-1} {\zeta_n}^k = 0 \ ^1 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} {\zeta_n}^k = -1 \tag{2}$$

証明 1 の n 乗根とは、

$$x^n - 1 = 0$$

の解である。また、その解は、ζ_n^0，$\zeta_n^1 \ldots \zeta_n^{n-1}$。つまり、

$$\begin{aligned}(x-\zeta_n^0)(x-\zeta_n^1)\ldots(x-\zeta_n^{n-1}) &= x^n - (\zeta_n^0 + \zeta_n^1 + \cdots + \zeta_n^{n-1})x^{n-1} + \cdots + \zeta_n^0\zeta_n^1\cdots\zeta_n^{n-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より、$\zeta_n^0 + \zeta_n^1 + \cdots + \zeta_n^{n-1} = 0$ **証明終**

定理 2.2 の (2) は次章でよく使います。

3 1 の原始 n 乗根の和

前章では 1 の n 乗根の全ての和を扱いましたが、この章では、1 の原始 n 乗根だけの和を扱います。

3.1 n が素数のとき

この時、自明に -1 です。*(∵***定理** 2.2*)*

3.2 n が異なる 2 個の積のとき

$n = pq$ とすると、1 の全ての n 乗根から p 乗根と q 乗根を除いたものになります。なので、
$(-1) - (-1) - (-1) = 1$ で 1 になります。

3.3 n が異なる 3 個の素数の積のとき

$n = pqr$ とすると、1 の全ての n 乗根から p, q, r 乗根を除き、pq, qr, rp 乗根を加えたものになります。なので、
$(-1) - 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -1$ で -1 になります。

3.4　n が異なる k 個の素数の積のとき

3.3 の議論から推測できるように、1 の n 乗根の和は、

$$(-1) +_k C_1 -_k C_2 +_k C_3 - \dots$$

となります。3.2 や 3.3 での議論を参考にすると、k を偶数か奇数かで場合分けをする必要がありそうです。

3.4.1　k が偶数

$$(-1) +_2 C_1$$

$$(-1) +_4 C_1 -_4 C_2 +_4 C_3$$

$$(-1) +_6 C_1 -_6 C_2 +_6 C_3 -_6 C_4 +_6 C_5$$

これを見ると何となく二項定理が使えそうだなぁと思います。説明し難いので、結果だけ述べると、

$$(-1) - (x-1)^k + x^k + 1$$

に $x = 1$ を代入した値になります。
$\therefore$　k が偶数のとき、必ず 1 になります。

3.4.2　k が奇数

この場合、${}_kC_m ={}_k C_{(k-m)}$ となるので、簡単に -1 になることが示されます。

これで、n に平方因数が無いときが終わりました。ここまで来ると、形があの関数にそっくりだなと気付くわけです。

3.5　n に平方因数が含まれるとき

n に立方因数が含まれていたり、平方因数が複数含まれていたりする場合を全て場合分けするのは不可能です。ですが、3.2 や 3.3 を見てみると、素数 p の冪乗を p に変えてしまっても変わらないように思えます。そして、他に平方因数がある時は、そのようにしても何の問題が無いことが簡単に示せます。また、立方因数もしくは素数の 4 乗、5 乗があったとしても同じことが

言えることも簡単に示せます。すると、全ての n は、次のような形の n と同値に書き変えてしまえることが分かります。

$n = p^2X$ (但し、X は異なる k 個の素数の積とする)

そして、p^2X と pX の違いはなんでしょう。それは「p^2X の場合は pX の倍数を考えなければならない」ということです。すると、k が奇数の時、-1 しなければならない。また、k が偶数の時、$+1$ しなければならない。つまり、この場合全て 0 になります。

以上の議論により、

$$f(n) := \sum_{\substack{(d,n)=1 \\ 1\leq d\leq n}} \zeta_n^d \text{とすると、} f(n) = \mu(n) (\text{但し、}\mu(n)\text{ はメビウス関数})$$

4 あとがき

当初の予定では、「1 の原始 n 乗根の k 乗和」をする予定だったのですが、時間が無いため、そこまでできませんでした。$f(n) = \mu(n)$ より、「$f(n)$ が乗法的である」なども当然言えます。メビウス関数について詳しく知りたい方は以下の本を参照してください。*(*もっと良い本もあるのでしょうが、自分は持っていないので*)*

・*G.H.Hardy　E.M.Wright*『数論入門　』

3.5 はへたくそな日本語のせいでよく分からなくなっていますが、ご了承ください。