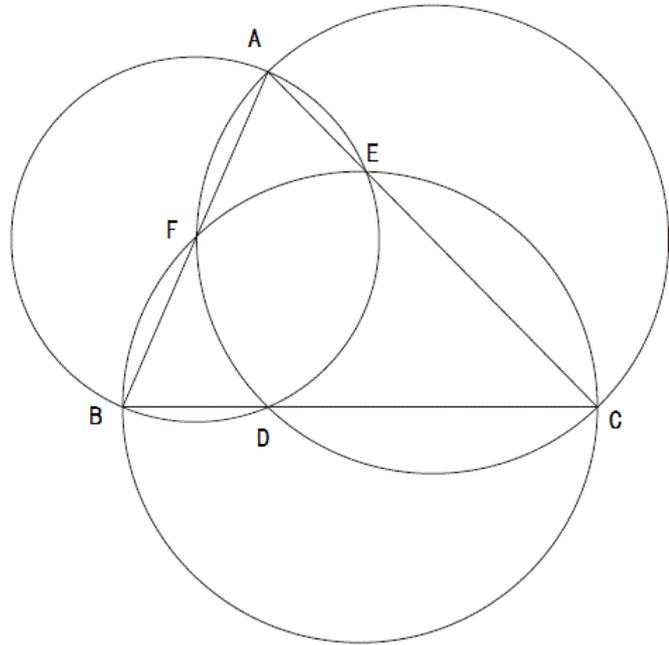


三角形の相似

中川宏

定理

鋭角三角形 ABC において、各辺の中点を中心としてその辺の両端を通る円3つの交点のうち、三角形の頂点でない3点を D, E, F とすると、それらはいずれも三角形 ABC の边上にある、また三角形 $A F E$ 、三角形 $B D F$ 、三角形 $C E D$ はいずれも三角形 ABC と相似（鏡像）である。

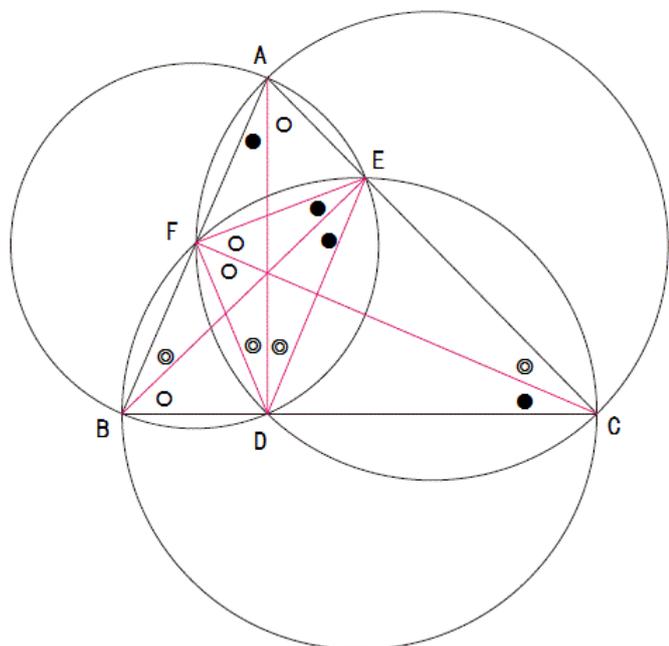


証明

図のように補助線を引き、角に記号を付ける。

たとえば、 $\angle ADC$ は円の直径 AC に対する円周角、 $\angle ADB$ は円の直径 AB に対する円周角であるから、いずれも直角である。もしも点 D が線分 BC 上にないと仮定すると2点 B, C を通る直線が2本存在することになる。それはユークリッド幾何の前提に反するから、点 D は辺 BC 上にある。

点 E が線分 AC 上にあること、点 F が線分 AB 上にあることも同様に示すことができる。



また、同一の円弧にたいする円周角は等しいことから、上図の○、●、◎はそれぞれ等しい。

$$\angle AFE = 2\pi - (\text{○} + \text{●} + \angle FEA)$$

$$\angle FEA = 2\pi - (\text{○} + \text{●} + \text{●} + \text{◎})$$

から、 $\angle AFE = \text{●} + \text{◎}$

また、 $\angle BCA = \text{●} + \text{◎}$ だから、

$$\angle AFE = \angle BCA$$

したがって、 $\angle FEA = \angle ABC$

よって、三角形ABCと三角形AEFは相似（鏡像）である。

同様に、三角形BFDと三角形CDEもまた三角形ABCと相似（鏡像）である。

上に見たことから、点Dは点Aから辺BCに降ろした垂線の足、点Eは点Bから辺CAに降ろした垂線の足、点Fは点Cから辺ABに降ろした垂線の足でもある。よってAD、BE、CFの交点は三角形ABCの垂心であり、三角形DEFは垂心三角形とも呼ばれる。

この垂心三角形の周長は、

$$DE + EF + FD = \frac{8S^2}{AB \times BC \times CA} \quad (S \text{ は三角形ABCの面積})$$

であることが知られている。（「なぜ初等幾何は美しいか」Yvonne & René Sortais 東京出版）

ここで三角形の面積に関するヘロンの公式を適用してみる。

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

を使ってSを消去すると、

$$\frac{DE + EF + FD}{a+b+c} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}$$

この値は元の三角形の周長にたいする垂心三角形の周長の比であるが、元の三角形の3辺の長さだけで表せることがおもしろい。また、このことから任意の三角形に内接する周の長さが最小の三角形は垂心三角形であることが導けるのだという。