■△＝□問題の高次元化（pon 君のレポート，pdf 版）

ペル方程式：$x^2-dy^2=1$について，フェルマーは少なくとも１つの自明でない整数解（$(x,y)=(\pm 1,0)$）以外の解が存在するだろうと予想しましたが，この予想は１７６８年，ラグランジュにより証明されています．

この方程式は無限に多くの解をもち，基本解（最小の整数解）を（x,y）とおくと一般解は

$$\pm(x+y\sqrt{d})^n \qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$$

により与えられます．ペル方程式は$\sqrt{d}$の最良近似値を次々に生成する所以です．

ペル方程式を拡張する方向としては，ひとつには未知数の個数を増すこと，もうひとつには指数を大きくすることです．１９０９年，ヒルベルトの第１０問題を受けて，トゥエはトゥエ方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n=m \qquad (n\geq 3)$$

は有限個の整数解しかもたないという注目すべき結果を得ました（トゥエの定理）．

この結果は，２元３次形式

$$x^3-dy^3=1$$

などに応用され，自明でない整数解は高々１つしかないという結果をもたらしました．この方程式は$\sqrt[3]{d}$の最良近似値を求めるペル方程式の拡張版と考えられるわけです．

先日，高校生の pon 君より正四面体数＝立方体数の問題に関するレポートを頂きました。今回のコラムでは pon 君に教えてもらった証明を紹介したいと思います．コラム「ペル方程式に帰着される問題」では△＝□（三角数＝四角数問題）とペル方程式を取り上げましたが，正四面体数＝立方体数の問題はペル方程式の拡張版：$x^3-dy^3=1$に帰着されます．

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

数論

pon

1　はじめに

Joseph H. Silverman『はじめての数論』に練習問題 1.1「平方数と三角数が一致するような数 (ex.1,36 . . .) は無限に存在するか？」というような問題があった。この論文ではこの問題を解き、そしてそれを拡張しようと思う。

2　準備

この論文に必要な定義・定理を紹介します。定理については証明しないので、証明を知りたい方は、参考文献をお読みください。

$\mathbb{N}$
自然数全体の集合 (この論文では、自然数解のことを $\mathbb{N}$ 解とも書くこととする)

$\mathbb{Z}$
整数全体の集合 (この論文では、整数解のことを $\mathbb{Z}$ 解とも書くこととする)

平方数
自然数の 2 乗であるような自然数

立方数
自然数の 3 乗であるような自然数

三角数
正三角形の形に点を並べたときにそこに並ぶ点の総数に一致する自然数
n 番目の三角数は 1 から n までの自然数の和に等しい

四面体数
正四面体の形に点を並べたときにそこに並ぶ点の総数に一致する自然数
n 番目の四面体数は 1 番目から n 番目までの三角数の和に等しい

定理 2.1 *Pell* 方程式[1]の解は無限にある。

---

[1] 平方数でない自然数 d に対して、$x^2 - dy^2 = 1$ という方程式のこと

定理 2.2 (Thue の定理)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n = m \qquad (n \geqq 3)$$

の解は高々有限個である。[2]

定理 2.3

$$x^3 - dy^3 = 1$$

の $\mathbb{Z}$ 解は $(x, y) = (1, 0)$ という自明な解を除いて高々一つしかない。

3　平方三角数

ここでは、平方三角数について、つまり、先の問題を解きたいと思う。
n 個目の三角数は

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

である。これが平方数であるので、

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \ (m \in \mathbb{N})$$

と書ける。両辺を 2 倍すると、

$$n(n+1) = 2m^2$$

$(n, n+1) = 1$ より、

$$(n, n+1) = (2s^2, t^2) or (s^2, 2t^2) \ (s, t \in \mathbb{N})$$

である。前者の場合、

$$t^2 - 2s^2 = 1$$

後者の場合、

$$2t^2 - s^2 = 1$$

つまり $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$ の $\mathbb{N}$ 解が無限にあればよい。[3]

$$X^2 - 2Y^2 = (X + Y\sqrt{2})(X + Y\sqrt{2})$$

[2] この証明は自分は見たことがありません。しかし、$n = 3$ の場合については、後の参考文献で紹介する本で示されています。

[3] **定理** 2.2 より自明ではあるが

と因数分解でき、ここに (X,Y) の条件を満たす一つの解 (x,y) があるとすると、

$$\begin{aligned}(x^2-2y^2)^2 &= (x+y\sqrt{2})^2(x-y\sqrt{2})^2\\ &= \{(x^2+2y^2)+2xy\sqrt{2}\}\ \{(x^2+2y^2)-2xy\sqrt{2}\}\end{aligned}$$

これは、(X,Y) を満たしているので、帰納的に、(X,Y) を満たす $\mathbb{N}$ 解は無限にあることが示された。

4 立方四面体数

§2 の拡張で、立方数であり、四面体数である数について考えたいと思う。まず、四面体数の一般項を求める。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = m^3(m\in\mathbb{N})$$

となるような解を考える。ここで、場合分けをする。
(1) n が 3 の倍数で、 n が 2 の奇倍数の時
この時、$(\frac{n}{6}, n+1, n+2)=1$ より、

$$n+1=p^3 \qquad\qquad n+2=q^3$$

となる[4]。同様にして場合分けしていくと、
(2) n が 3 の倍数で、 $n+1$ が偶数の時 $\Longrightarrow$ $n+1=2p^3, n+2=q^3$
(3) n が 3 の倍数で、$n+2$ が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n+1=p^3, n+2=2q^3$
(4) $n+1$ が 3 の倍数で、 n が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n=2p^3, n+2=q^3$
(5) $n+1$ が 3 の倍数で、 $n+1$ が偶数の時 $\Longrightarrow$ $n=p^3, n+2=q^3$
(6) $n+1$ が 3 の倍数で、$n+2$ が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n=p^3, n+2=2q^3$
(7) $n+2$ が 3 の倍数で、 n が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n=2p^3, n+1=q^3$
(8) $n+2$ が 3 の倍数で、 $n+1$ が偶数の時 $\Longrightarrow$ $n=p^3, n+1=2q^3$

[4] $\frac{n}{6}=r^3$ とも書けるが、この場合必要ないので無視する

(9) $n+2$ が 3 の倍数で、 $n+2$ が 2 の奇倍数の時　$\Longrightarrow n=p^3, n+1=q^3$
つまり、

$$X^3-Y^3=1$$

$$X^3-Y^3=2$$

$$X^3-2Y^3=\pm 1$$

$$X^3-2Y^3=\pm 2$$

の解を調べるのと同値である。

4.1　$X^3-Y^3=1$　,　$X^3-Y^3=2$ について

$$X^3-Y^3=(X-Y)(X^2+XY+Y^2)$$

$X>Y>0$ であることより、上記を満たす $\mathbb{N}$ 解が無いことが直ちに分かる。

4.2　$X^3-2Y^3=\pm 1$ について

$$X^3-2Y^3=1$$

定理 2.3 より、解は $(1,0)(-1,-1)$ しかない。

$$X^3-2Y^3=-1$$

この解は、$(-1,0)(1,1)$ しかない
証明　仮に、他に解 (x_1,y_1) があったとすると、$(-x_1,-y_1)$ は $X^3-2Y^3=1$ を満たす。
しかし、これは**定理** 2.3 に反する。
$\therefore$解は $(-1,0)(-1,-1)$ しかない　$\square$

4.3　$X^3-2Y^3=\pm 2$

$$X^3-2Y^3=\pm 2$$

この解を求めたい。(右辺)=-2 の解が分かれば§4.2 と同じアプローチで (右辺)=2 の解も分かる。
では、$X^3-2Y^3=-2$ の解を求めていこう。(右辺) が偶数より X も偶数である。ここで $X=2X'$ とすると、

$$8X'^3-2Y^3=-2$$

両辺を $-\frac{1}{2}$ 倍すると、

$$Y^3 - 4X'^3 = 1$$

この式より、$Y \equiv 1\ (mod\ 4)$ が分かる。ここで、$Y = 4b + 1\ (b \geqq 0, b \in \mathbb{Z})$ とすると、

$$4b(16b^2 + 12b + 3) = 4X'^3$$

両辺を 4 で割って、

$$b(16b^2 + 12b + 3) = X'^3$$

$b = 0$ の時、条件を満たす。$b \neq 0$ の時、X'^3 は b の倍数より、X' は b の倍数。ここで、$X' = ab\ (a \in \mathbb{N})$ とすると、

$$16b^3 + 12b^2 + 3b = a^3b^3$$

整理すると

$$b\{(16 - a^3)b^2 + 12b + 3\} = 0$$

$b \neq 0$ より、

$$(16 - a^3)b^2 + 12b + 3 = 0$$

二次方程式の解の公式より、

$$\begin{aligned} b &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 12(16 - a^3)}}{2(16 - a^3)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{3a^3 - 12}}{a^3 - 16} \end{aligned}$$

$a = 1, 2$ の時不適より、$a \geqq 3$ が分かる。

$$\therefore \frac{6}{a^3 - 16} < 1$$

$$\frac{\sqrt{3a^3 - 12}}{a^3 - 16} < 1$$

$b = 1$ となるが、$b = 1$ となる解は存在しない。
$\therefore b = 0$ のみが解となる。
$b = 0$ というのは、$(X, Y) = (0, 1)$

また、$X^3-2Y^3=2$ の時、$(X,Y)=(0,-1)$ となる。[5]
∴(X,Y) の $\mathbb{Z}$ 解は $(1,0)(-1,-1)(-1,0)(1,1)(0,1)(0,-1)$ しかなく、
$X,Y\in\mathbb{N}$ より、$(X,Y)=(1,1)$
よって、立方数であり、且つ四面体数であるような数は 1 しか存在しない。

5 一般化 (未解決)

予想 5.1

$$ {}_nC_k=\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}=m^k $$

は、以下の条件を満たす時成立しない。

$$ m,n,k\in\mathbb{N},k\geqq 3,m\neq 1 $$

定理 2.2 を用いると、有限であることは示せそうですが、残念ながら予想は示せませんでした。$k=2$ の時、解が無限にあって、$k\geqq 3$ の時解なしというのが、フェルマーの最終定理っぽくてかっこいいなぁとは思ったのですが…今年の研究課題としたいと思います。また、三角数は 1,2,3, ... の和なので、1,4,9, ... の和などと k 乗和に拡張するのも面白いかも知れません。

6 おわりに

予想を示すことができたひとは是非、

$pon\_honda1219@yahoo.co.jp$

まで mail してください。お願いします。

7 参考

以下、参考文献の紹介です。
まず、この問題を思いついたきっかけとなった本は

・はじめての数論 ($Joseph\ H.\ Silverman$)

[5]実は、§4.2 もこのような方法で示せるのですが、この方法だと計算量が多くなり、間違いやすいので、**定理** 2.3 を使わせてもらいました。興味があれば、この方法でも §4,2 を解いてみてください。

次に、**定理** 2.1 の紹介と $n = 3$ の場合の**定理** 2.2 の証明を与えてくれた本は

- 楕円曲線論入門 ($Joseph\ H.\ Silverman$)

次に、**定理** 2.3 の証明を与えてくれた本は[6]

- 初等数論講義 ($Alan\ Baker$)

最後に、 TEX の参考にした本は、

- LATEX 2_ε 美文書作成入門 (奥村晴彦)

---

[6] この本は絶版なのでボクは読んでいませんが