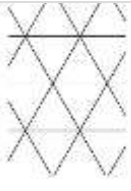
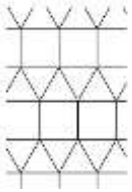
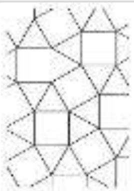
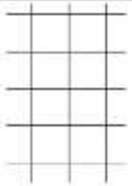
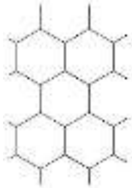
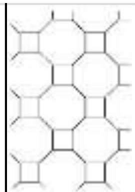
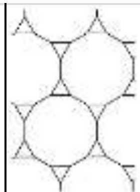
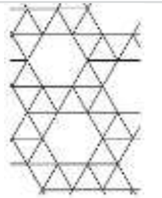
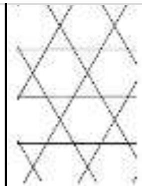
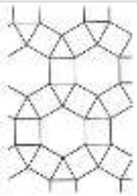
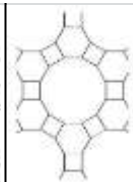
アルキメデスのタイルと立体

中川宏

ここでは、アルキメデスのタイル貼り（平面充填形）に、１種類の正多角形からなるタイル貼りを含めて、また、アルキメデス立体にはプラトンの立体を含めて、取り扱うことにする。
このような場合に通常一つの頂点に集まる正多角形の面数を一定方向に並べて頂点形状として表記する方法がとられるが、ここでは、ひとつの辺の両側の正多角形の面数によって表記する辺形状という概念を導入することにする。
たとえば、頂点形状[3,3,3,3,3,3]と表される三角格子は３３と表記する。
また、複数の辺形状があるばあい、たとえば正方形の帯と正三角形の帯が交互にならぶ[3,3,3,4,4]は、３３と３４と４４という三種類の辺形状を有するが、

３３
　３４
　　４４を重ねて
３３４４と表記することにする。
このやりかたをプラトンの立体やアルキメデスの立体にも適用する。すると、便利なことにアルキメデスのタイルとアルキメデスの立体を連続的に関連させることができる。たとえば、六角格子６６→正１２面体５５→立方体４４→正四面体３３である。２２は２角形を意味するので３までで止める。３３と表記する立体は正８面体や正２０面体もあるが、ここは六角格子[6,6,6]の頂点次数が３であることを考慮して同じ次数３の立体を充てる。
アルキメデスのタイル貼り[3,12,12]からは切頂１２面体３１０１０→切頂立方体３８８→切頂四面体３６６というように 12 と 12 の関係を壊さないで偶数をたどってゆく。
このようにすると、すべてのアルキメデスのタイルからすべてのアルキメデスの立体を辺形状の簡単な減算によって導くことができる。ただし切頂２０面体６６５だけは工夫が必要で、六角格子を６６６と表記して６６とは別系列にしてやる必要がある。

アルキメデスのタイル												
頂点形状	[3,3,3,3,3,3]	[3,3,3,4,4]	[3,3,4,3,4]	[4,4,4,4]	[6,6,6]		[4,8,8]	[3,12,12]	[3,3,3,3,6]	[3,6,3,6]	[3,4,6,4]	[4,6,12]
辺形状	**33**	**3344**	**334**	**44**	**66**	**666**	**488**	**3 12 12**	**336**	**36**	**346**	**4 6 12**
辺形状		**3333**	**333**	**33**	**55**	**665**	**466**	**3 10 10**	**335**	**35**	**345**	**4 6 10**
アルキメデス立体		正20面体(五角反柱＋五角錐)	正20面体	正8面体	正12面体	切頂20面体	切頂8面体	切頂12面体	ねじれ12面体	20・12面体	小菱形20. 12面体	大菱形20・12面体
頂点形状		[3,3,3,3,3]	[3,3,3,3,3]	[3,3,3,3]	[5,5,5]	[5,6,6]	[4,6,6]	[3,10,10]	[3,3,3,3,5]	[3,5,3,5]	[3,4,5,4]	[4,6,10]
辺形状					**44**	**664**	**444**	**388**	**334**	**34**	**344**	**468**
アルキメデス立体					立方体	切頂8面体	四角柱(立方体)	切頂立方体	ねじれ立方体	立方8面体	小菱形立方8面体	大菱形立方8面体
頂点形状					[4,4,4]	[4,6,6]	[4,4,4]	[3,8,8]	[3,3,3,3,4]	[3,4,3,4]	[3,4,4,4]	[4,6,8]
辺形状					**33**	**663**		**366**	**333**	**33**	**343**	**466**
アルキメデス立体					正4面体	切頂4面体		切頂4面体	ねじれ4面体(正20面体)	正8面体(三角反柱)	四角反柱	切頂8面体
頂点形状					[3,3,3]	[3,6,6]		[3,6,6]	[3,3,3,3,3]	[3,3,3,3]	[3,3,3,4]	[4,6,6]
辺形状								**344**				**464**
アルキメデス立体								三角柱				六角柱
頂点形状								[3,4,4]				[4,4,6]

この表で興味深いのは、正２０面体である。

正２０面体は辺形状３３であるが、３３正２０面体はこの表に現れない。そのかわりに別の３種類の表記で現れる。ひとつは３列目の３３３であるが、このように表記されるということは同じ辺形状３３でも２種類含まれていることを想像させる。じっさい、同じ３３３は９列目の最後に現れるが、これはねじれ正四面体を意味することが上からの流れで読み取れる。そうするともとの正四面体の辺とねじり操作で新たに追加される辺とは意味上は区別されるので、３３３という表記になると理解できるわけである。

もうひとつ３３３３という正２０面体が２列目に現れる。これは上のアルキメデスのタイルの図の正三角形の帯に注目すると反角柱の側面が思い浮かぶので、正五角反柱の上下に正五角錐を重ねた形の正２０面体を意味することが理解できる。

もう一つこの表で興味深いのは、下段のほうに通常アルキメデスの立体から除外される角柱や反角柱の基本的なものが自然に現われることである。
４４４四角柱としての立方体や、３３三角反柱としての正８面体がしっかり位置づいていることも面白い。