## 学習ノートPart3

解析概論P277のFejerの定理を述べる。その前にまず区間［－π、π］において

積分可能なf(x)を考え、 $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ (n=0,1,2,…)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2, ,\cdots)$$

によって$a_n$、$b_n$を定めてそれを係数とする三角級数を作る。それがf(x)から生ずるフーリエ級数と呼ばれるものである。それをg(x)として

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + \cdots a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$ となる。

さて、この g(x)は収束するであろうか、また収束するにしても、その和が、はたして f(x)に等しいであろうか？この問題に対する１つの答が Fejer の定理であるといえる。

Fejerの定理を述べるにはチェザロ１次総和法が必要なので、もう１度おさらいする。無限級数の部分和を$s_n$ (n＝1,2、,…) として$S_n = \dfrac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)$としたとき、n→∞のとき$S_n$→Sならば、チェザロ１次総和法によって級数はSに総和されるという。記号では（C,1）‐｛$s_n$｝＝S　　と書く。

Fejer の定理とは、f(x)が区間［－π、π］において連続で、f(－π)＝f(π)ならばf(x)から生ずるフーリエ級数g(x)がチェザロ１次総和法によって一様にf(x)に総和可能であることである。つまりg(x)の第n部分和の相加平均まで考えればそれは一様にf(x)に収束するということである。(さらにf(x)に区分的に滑らかつまり$f'(x)$が連続という条件を加えると、そのフーリエ級数g(x)は一様かつ絶対にf(x)に収束する。)

このFejerの定理と、杉岡氏のテーラーシステムとをくらべてみる。Fejerの定理をFjT, 杉岡氏のテーラーシステムをSTと略記する。

FjTの対象はフーリエ級数、STの対象は解析関数を項とする級数(解析級数と呼ぶ)である。STのほうがFjTよりも対象はずっと広い。

FjTは、そのフーリエ級数がチェザロ１次総和法の範囲でもとのf(x)に「収束」することを保証し、ST は解析級数がアーベル総和法の範囲で一定の条件下でテーラー級数f(x)に「収束」することを保証している、といってよい。すると、STはFjTを含むといえるのか、つまりSTはFjTの拡張といえるのか、である。

まず、FjTがチェザロ１次総和法なのに、STがアーベル総和法であるというこの差異について。これはどちらもフーリエ級数を対象としたときには際立った違いである。

FjT の情報のほうがはるかに「濃い」といえる。ST では、フーリエ級数 g(x)がアーベル総和法で f(x)に転換されるということだが、FjT によって、実はアーベル総和法でなくチェザロ１次総和法で可能だといっているのである。

アーベル総和法とチェザロ１次総和法とでは月とすっぽんである。チェザロ n 次総和法というのは $1-2^{n-1}+3^{n-1}-\cdots$ を総和可能にするもので､そのチェザロ n 次総和法よりもアーベル総和法の方が強いのである。チェザロ１次総和法といったら１－１＋１－…を総和可能にするレベルであって要するに上下に有界の範囲で振動するものを総和可能にするレベルなのである。だから FjT の内容は本当にびっくりである。しかしである。タウバー型定理があるのである。A-$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ でかつ $u_n \geqq -H$ ならば（C-1）-$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ だからこのタウバー型条件 $u_n \geqq -H$ が ST の中で証明できれば ST は FjT を含むことになる。これは絶対証明できると思うけれども、私はまだ証明できていない。だからまだ予想である。いや、もうひとつ、ST で、f(x)から生ずるフーリエ級数 g(x)が h (x)に転換されたとして、h(x)は元の f(x)に一致するということをいわなければ ST が FjT を含むことはいえない。しかしこれは簡単である。FjT で(C－１)-g(x)=f(x)はいえる。ST では A-g(x)=h(x)であった。(C－１)-g(x)=f(x)ならば A-g(x)=f(x)がいえるから、h(x)=f(x)となる。つまりフーリエ級数 g(x)から ST で転換される h(x)は必ずもとの f(x)だということである。だから、まだ予想ではあるけれど、ST は FjT を含むということである。

つぎ、FjT,すなわち Fejer の定理は 1905 年だとのこと。ところで、この Fejer の定理は、チェザロ１次総和法の範囲で f(x)に｢収束｣を保証しているだけではない。チェザロ１次総和法によって f(x)が求まることをいっているのである。コルモゴロフ｢函数解析の基礎｣P394 にははっきりと、｢フーリエ級数から、もとの連続函数を復元する方法を与えた次の定理は｣と Fejer の定理を紹介している。そうはいっているのに具体的に復元する例を全く示していない。わたしには、(C-1)でもとの f(x)を求めるということが不思議でならない。例えば、$f(x)=\frac{1}{2}x$ から作られるフーリエ級数 g(x)は、$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots$ であるが、チェザロ１次総和法を g(x)に適用してどうやって f(x)を求めるのであろうか、（C-1）はとても使い勝手が悪いと思うのである。だったら、（C-1）-g(x)=f(x)ならば A-g(x)=f(x)なのだから、f(x)のもとめ方としては、アーベル総和法を使ったほうがはるかに使い勝手がいいはずである。ところで、アーベル総和法を使うとして、それは結局のところ ST つまり杉岡氏のテーラーシステム以外に何が考えられるであろうか｡ほかにもあるかもしれないが、杉岡氏のテーラーシステムが一番自然だと思うのである。

そこから考えられること、それは、1905 年 Fejer の定理が発表されたら、時間を置かず、杉岡氏のテーラーシステムと同じものは発見されたに違いないということである。杉岡氏のテーラーシステムは確かに杉岡氏がオリジナルに開発しそれによって杉岡氏は奇数ゼータを簡明な形で求めるなど、様々な偉大な発見をされているのだけれども、しかし

テーラーシステムのいわゆるプライオリティすなわち優先権、誰が最初に発見したのか、ということに関しては、あるいはアーベルかもしれないが、絶対に Fejer の定理のあとに誰かがいるに違いない、というのがこの間の考察から得られる結論である。

つまり Fejer の定理は、それ自体でこの間の謎解きを、すべてあまねく解決してしまうというものではなかったけれども、しかし必ず謎解きを完成させずにはおかないそういう必然性をもった定理であるということである。そういうことがわかったということ自体この間の考察、謎解きの成果だとは思っている。

もしも Fejer の定理のあとでも杉岡氏のテーラーシステムと同じものが開発されていないとしたら、杉岡氏のテーラーシステムは杉岡の定理として記されるべき偉大な発見である。私は専門家ではないし基礎的な本しか見ていないから、おそらく、専門書には、この間の謎解きのすべてが、全くちっぽけな探索としかうつらない、解決済みの探索だということが書かれていると思われる。しかしながら、私にとっては本当に七転八倒だったけれど、最高に楽しく面白かった旅であった。数学愛好家の皆さんにはぜひともこの気持ちを共有していただきたいと思うしだいである。

ほかにもいろいろ発表したいことがあるのだけれどもそれはまた別の機会にということで、謎解きの基本は終わったと思うのでここで終わります。

2009 年 6 月 18 日　　　杉本　記