Part2 への追加

①Part2 の冒頭「順序変更して得られた f_n のアーベル総和法による和の f が実は f_n の本当の収束値に等しいということを保証するのがアーベル総和法とタウバー型定理であって、順序変更 OK を保証するとまではいえないのである。」と書いたが、f_n は、条件収束の二重級数の、ひとつの勝手な一列化による和の作り方であって，その収束値になど何の意味もなかった。そして、「f_n のアーベル総和法による和の f」というのはじつは列で足したもののアーベル和ということであってここには混同、すりかえがあった。だから「和の f が実は f_n の本当の収束値に等しいということを保証するのがアーベル総和法とタウバー型定理」ということもいえなかったのである。したがって Part1 でのその箇所(タウバー型定理による証明の箇所)は全面的に撤回である。その部分は、今回の Part2 の、「行－列転換 OK」の証明に完全に置き換えられる

②「行－列転換 OK」の証明から、一般の g(z)について、「行－列転換 OK」の条件がわかった。それが Part2 の最大の収穫だった。

そこで一般的定式化を図ることにする。これまでの文字を変えるので注意。

$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)$ が与えられる。$\alpha < x < \beta$ としておく。各 $g_m(x)$ はテーラー展開可能を仮定する。次に $g(x、z)=\sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)z^m$ という z のべき級数を考える。(もちろん z は複素数でよい。)｜z｜＜1 すなわち収束半径を 1 としても一般性は失われないはずである。(収束半径 0 の $g_m(x)$ は除外する。除外できる根拠はあとで述べる。収束半径 r のときはそれに対応した一般的なアーベルの定理を適用すればよいから)

x ＝a 点の周りでテーラー展開したのを

$g_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_{mk}\dfrac{(x-a)^k}{k!}$ とすると g(x)から(形式的に、というべきかもしれないが)二重級数 G がつくられる。その二重級数を二重数列に転換して行列にする。その行列を［G］とする。［G］の m 行 n 列の項は

$g_{mn}\dfrac{(x-a)^n}{n!}z^m$ である。　　　次に［G］の第 n 列を上から総和する。すなわち $\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}\dfrac{(x-a)^n}{n!}z^m=\dfrac{(x-a)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}z^m$ で、ここで $\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}z^m=f_n(z)$ とおくと、第 n 列の総和は $f_n(z)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$ である。そして $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$ ＝f(x、z)とおくと、

f(x、z)は要するに［G］の、列で上から足していったもののすべての列にわたる総和である（.それを列型総和とよぶことにする。g(x、z)は行型総和ということになる。)

もし $\lim_{z\to 1-0} f(x,z)$ が存在してそれを f(x)とすれば、「行－列転換 OK」の条件とはすなわち g(x)を f(x)に転換できる条件ということになる。その条件を述べよう。

［G］の各項の絶対値の総和が収束する z の領域、すなわち絶対収束する z の領域それを K_G とすると、K_G が存在することそれが第１の条件である。（K_G は１点やバラバラの点ではだめである。）ところで、z のべき級数 g(x、z)が絶対収束する領域を K_g とすると、簡単に $K_g \supset K_G$ であることがわかる。そこから、K_g の存在が必要条件であることがいえる。つまり K_g が存在しなければ K_G は存在せず、したがって「行－列転換」は不可である。それが「収束半径０の $g_m(x)$ は除外する」とできる根拠にもなる。

次に第２の条件。それは、$\lim_{z\to 1-0} g(x,z)$ が存在することである。それはすなわち、g(x)のアーベル和が存在するということである。

第３の条件は $\lim_{z\to 1-0} f(x,z)$ が存在することである。その意味を考える。

$$\lim_{z\to 1-0} f(x,z) = \lim_{z\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \lim_{z\to 1-0} f_n(z) \text{ だから}$$

すべての n について $\lim_{z\to 1-0} f_n(z)$ が存在して、かつ上記無限級数が収束することである。$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_{mn} z^m$ だったからそれはすなわち、すべての n について $\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}$ のアーベル和が存在しそのアーベル和を f_n とすれば $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f_n$ が収束することである。

以上の３条件を満たすとき、

f(x)＝g(x)のアーベル和　・・（23）　がいえる。

そして、g(x)が収束するときは、

f(x)＝g(x)　・・（24）　である。

(23)の左辺は f(x)であって、f(x)のアーベル和ではないことに注意。f(x)はもうすでにアーベル和なのだからである。(23)(24)から、要するに杉岡氏のテーラーシステムは、g(x)や g(x)のアーベル和をテーラー級数 f(x)で表すその f(x)のもとめ方であるということになる。

条件の中で、中心的なのは、g(x)のアーベル和が存在することと、$\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}$ のアーベル和が存在することである。平たく言えば、それは g(x)と $\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}$ のどちらの級数も振動的発散級数

までは OK、本当の発散級数はダメということである。どんな振動的発散級数でも OK かというとそうではなく、あまりにも強レベルのは第 1 の条件 K_G の存在ではねられるということである。

とにかく、(24) の f(x)＝g(x)こそは、収束する g(x)に一致するテーラー級数 f(x)がアーベル総和法によって求められるということの根拠であり、そしてこれほどアーベル総和法の威力とさらに必要性を示しているものはないのではないかと思われるほどである。そこから私には、何らかの形で、本質的に同じことをアーベルがつかんでいたに違いない、と思われるのだ。Part1 で、タウバーが謎を解いたと書いたけれど、冒頭に書いたようにその根拠はなくなった。最初にアーベルが謎を解いた、それが正しいと思う。アーベル研究者のご意見をぜひとも聞きたいところである。

Fejer の定理、フーリエ級数展開との関係はまだ今後の課題である。ただ、Fejer の定理で謎解きが済んでしまうということはない、それだけは現時点で確かである。

2009 年 6 月 6 日　　　　杉本