「学習ノート Part2」　　「負整数でのゼータ関数の値についての謎解き」

なぜ $\zeta(-1)$＝"1＋2＋3＋…"＝−1／12 なのか？

先の原稿の中に、重大な不備を見つけたので修正する。(前回の学習ノートを Part1 とする。)その結果、謎解きはさらに進展した、と思っている。

まず、どこが問題なのかを明らかにしよう。P14 で、順序変更 OK を保証するのはアーベル総和法とタウバー型定理だとしたが、それは間違いであった。というのは、順序変更して得られた f_n のアーベル総和法による和(以下、アーベル和とよぶことにする。)の f が実は f_n の本当の収束値に等しいということを保証するのがアーベル総和法とタウバー型定理であって、順序変更 OK を保証するとまではいえないのである。つまり、順序変更 OK を勝手に前提にしてしまっていたわけである。実は、f_n を具体的、有限的に構成したときに有限だからその中では順序変更 OK としてしまったが、そんなことをいったらどんな条件収束級数も順序変更 OK になってしまう。まことにうかつであった。したがって、$f_n \to f$ となったとしても、f と元の(8)の $f(1+\pi)$とが一致することは保証されなくなる。

そこでまずは数値的に検証してみた。私のつたない計算(せいぜい 10 項ぐらいまでの和)で、

$f(\pi+1)=-0.565889 \quad \to \quad f=-0.565610$

$f(4\pi/3)=-0.532646 \quad \to \quad f=-0.534259$

$f(\pi+2)=0.304957 \quad \to \quad f=0.293499$

あと、$f(\pi/2)$で一致することは、杉岡氏の結果から確かめられている。そこで、(8)の f(x)と、(10)の f(x)との一致は疑いないと思う。

さてそうなると、なぜだかわからないが一致するということである。わからなくても、(8) のフーリエ級数が(10)のべき級数に変換されるという事実はひっくり返らない。その変換を求めるのが目的ならば、それで OK,それで終わりである。しかしこの「学習ノート」の目的は「謎解き」にあるのだから、終わりとはならない。なぜ順序変更 OK なのか、その謎解きが残されているわけである。

ところで、「順序変更 OK」という言葉の意味をはっきりさせなければいけない。実はここに大きな概念上の混乱があったのである。ここでいう「順序変更 OK」というのは、二重級数の、行で足していったものの総和が、列で足していったものの総和に等しいという、特殊に制限された順序変更 OK ということである。式で書けば、二重級数の"m 行 n 列"の項 $a_{m,n}$ で、　$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$　ということである。決して条件収束

級数の順序変更 OK 一般ということではない。条件収束級数は、順序を適当に変更することによって任意の和に収束させることも、発散させることもできる、というのはディリクレーの有名な指摘だから、そこでの順序変更 OK の条件を考えているわけではない、ということである。そういうわけで、これからは「順序変更 OK」といわず、「行－列転換 OK」ということにする。

二重級数の和を考える場合、一重級数化が不可欠である。それを一列化と呼んでいるが、まずもってこの一列化自体、順序の問題をはらんでいるから、条件収束のときは、取り扱いがはなはだ厄介である。一列化の決め方によって二重級数の和がいろいろに変わるからである。解析概論 p 173 には $a_{m,n}$ の無限和を考えるとき $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ や $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ は、どちらも形式的で、二重級数総和の特別な方法にすぎないとある。そして、その特別な方法とはすなわち二重級数が絶対収束の場合においてのみ、であると記されている。(その根拠は Part1 の p6 で述べた,解析概論 p174 の解説にある。)

そのときのみ、和$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ということだ。そのことをしっかりと踏まえなければならない。

では、これから「行－列転換 OK」を証明することにする。

Part1 では、(8)の f(x)を

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos nx \qquad (8)$$

とした。そして簡単にするため、

$$f(\pi+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^n\cos n$$

で考えた。そしてそれを二重級数にしたわけだが、今回は少し変える。$f(\pi+1)$から次のような z(複素数で考えてよい)のべき級数 $g(z)$ をつくる。

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^3}(-1)^n\cos n\right\}z^{n-1}=-\cos 1+\frac{1}{8}(\cos 2)z-\frac{1}{27}(\cos 3)z^2+\cdots$$

この $g(z)$の収束半径は 1 である。そして、$g(1)$が存在して　$g(1)=f(\pi+1)$である。さらにこの $g(z)$を二重級数にして行列風に並べる。すると m 行 n 列の項 $a_{m,n}$ は

$$a_{m,n}=\quad(-1)^{m+n-1}\frac{1}{(2n-2)!}m^{2n-5}z^{m-1}$$

である。その二重級数を列で足す。

第 1 列を足したものを$-q_3(z)$とする。　$q_3(z)=1-\frac{1}{2^3}z+\frac{1}{3^3}z^2+\cdots$

第 2 列を足したものを$\frac{1}{2!}q_1(z)$とする。　　$q_1(z)=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\cdots$

第 3 列を足したものを$-\frac{1}{4!}p_1(z)$とする。　$p_1(z)=1-2z+3z^2-\cdots$

第 4 列を足したものを$\frac{1}{6!}p_3(z)$とする。　　$p_3(z)=1-2^3z+3^3z^2-\cdots$である。

第 3 列以降では Part1 の P3 で述べた Ps(x)がでてくる。すなわち、

$$Ps(x)=1+2^s x+3^s x^2+\cdots=\frac{1+E_{s1}x+E_{s2}x^2+\ldots+x^{s-1}}{(1-x)}\qquad (\,|\,x\,|<1\,)$$

の x を$-z$に代えた Ps($-z$)がでてくる。　この Part2 ではその Ps($-z$)を$p_s(z)$に代える。(極が z= 1 でなく z=-1 になる)

よって$p_s(z)=1-2^s z+3^s z^2\cdots=\dfrac{1-E_{s1}z+E_{s2}z^2-\ldots+(-1)^{s-1}z^{s-1}}{(1+z)}$(｜z｜<1)である。

そして

$$p(z)=-q_3(z)+\frac{1}{2!}q_1(z)-\frac{1}{4!}p_1(z)+\frac{1}{6!}p_3(z)-\cdots\qquad (\,|\,z\,|<1\,)$$

とおく。

p(z)はつまり、列で足したものの総和、無限和である。ここでこの二重級数が二重級数として絶対収束する z の条件を考える。詳細は省くが、

$$\sum|各項|=\frac{e+e^{-1}}{2}+\frac{e^2+e^{-2}}{2}\frac{|z|}{8}+\frac{e^3+e^{-3}}{2}\frac{|z|^2}{27}+\cdots$$

となり、この収束半径は$r=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{e^n+e^{-n}}{2}\dfrac{1}{n^3}}}=\dfrac{1}{e}$ である。よって、$|z|<\dfrac{1}{e}$では絶対収束する。

そこで今、$|z|<\dfrac{1}{e}$で考えれば二重級数は絶対収束だから

$$二重級数の和=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)\quad\cdot\cdot\quad(18)$$

がいえて、よって

$$|z|<\frac{1}{e}で、\quad g(z)=p(z)\quad\cdot\cdot\ (19)$$

である。

$\dfrac{1}{e}\leqq|z|<1$ではもちろん条件収束だから(18)がいえず、したがって(19)がいえない。と思いきや、ところがところが、である。ここに強力な助っ人が現れる。

解析概論 p 227 の定理 62 を書く。「領域 K において、f(z)、g(z)は正則で、K 内の小領域 K_0においては f(z)=g(z)とする。然らば K において常に f(z)=g(z)」

これは解析接続の定理である。これを g(z)と p(z)に適用する。g(z)も p(z)も｜z｜＜1 で正則である。よって、｜z｜＜$\frac{1}{e}$で常に g(z)＝p(z)だから

｜z｜＜1 でも g(z)＝p(z)　　　‥　　　（ 20 ） が い え る 。

（20）はのどから手が出るほどほしい等式である。それが意外にあっけなく手に入ったのだ。全く解析接続の定理の威力である。しかし不思議といえば本当に不思議である。絶対収束のときのみ、(18)がいえ従って(19)がいえたのではなかったのか？それがなぜ条件収束のときにも OK になるのか？矛盾ではないのか？当初かなり悩んだものである。ある瞬間謎は解けた。「絶対収束のときのみ、(18)がいえ従って(19)がいえたのではなかったのか？」それは全くその通りである。条件収束では（18）はいえない。しかし(18)をよく見て、その意味を考えてみる。(18)の意味は、絶対収束のときのみ、二重級数の和は $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ で も $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ で も 求 め ら れ 、 和 の 一 意 性 か ら $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ ＝ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$がいえるのである。それが条件収束ではいえなくなる。何がいえなくなるのか？どちらも和の求め方であるということがいえなくなるということである。和とは関係ないということ、である。絶対収束のときは二重級数の和を媒介にして両者は等しかったが、条件収束のときは、二重級数の和とは全く関係なく、両者が等しくなるということなのである。これで矛盾はなくなった。要するに、｜z｜＜1 で g(z)＝p(z)がいえ、それはつまり、｜z｜＜1 で「行－列転換 OK」がいえたということである。あともう一歩、である。その前に、有名なアーベルの定理を述べる。石黒一男「発散級数論」p 138 から引用する。

「べき級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ の収束半径が 1 で、かつ級数$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が値 s に収束するならば、$\lim_{x\to 1-0}f(x)=s$」　収束半径が r に一般化できるけれど、これで十分である。このアーベルの定理、自明なようで自明ではない。解析概論によると $\lim_{x\to 1-0}f(x)=s$ は詳しく書けば $\lim_{x\to 1-0}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k x^k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{n}u_k x^k\right)$ であって、2 つの lim の順序を勝手に変えてはならないからである。アーベルの定理は、右辺の極限値が確定ならば左辺の極限値も確定で、かつそれが右辺の極限値に等しいことをいうのである。その逆は真ではない。すなわち左辺の極限値が確定でも、等式は必ずしも成り立たない。　さてこのアーベルの定理、どうも今までいまいちすっきり理解できていなかったが総和法を勉強した後では実に鮮明である。それは、$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が s に収束するならば、アーベル総和法で A- $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ ＝ s であるということであって、それはアーベル総和法がパーマネントであることをいっているの

である。それゆえ総和法の学習でみたように、パーマネントであることを保証するような定理をアーベル型定理というのであった。逆が真でないこともよくわかる。

次に $\lim_{z\to 1-0} g(z)$ を考える。すなわちアーベル総和法を考えるということ。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^n\cos n = g(1) = f(\pi+1)$で、かつ $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^3}(-1)^n\cos n\right\}z^{n-1}$ の収束半径は 1 だから、アーベルの定理によって、$\lim_{z\to 1-0} g(z) = g(1) = f(\pi+1)$である。

次は $\lim_{z\to 1-0} p(z)$ を考える。$\lim_{z\to 1-0} p(z) = -\phi(3) + \frac{1}{2!}\phi(1) - \frac{1}{4!}\phi(-1) + \frac{1}{6!}\phi(-3)$ $-\cdots$ となり、しかもその収束（絶対収束）は Part1 で確認済みである。そこでその収束値を p とする。（Part1 では f にした） ところで、$|z|<1$ で $g(z)=p(z)$で あった。そして $\lim_{z\to 1-0} g(z) = f(\pi+1)$、$\lim_{z\to 1-0} p(z) = p$ である。そのとき $f(\pi+1)=p$ であることは容易に証明できる。

$|f(\pi+1)-p| < |g(z)-f(\pi+1)| + |p(z)-p| + |g(z)-p(z)|$

$= |g(z)-f(\pi+1)| + |p(z)-p| \to 0$ を使っても、またはアーベル総和法の加法性

からもいえる。 よって $p = f(\pi+1)$ … (21) これが求めようとした結論である。すなわち「行－列転換 OK」が証明されたということである。

そしてこの結論(21)はおどろくべきことに、「行－列転換 OK」だけでなく、p という、振動的発散級数のアーベル和の無限和が $f(\pi+1)$すなわちもとのフーリエ級数の収束値にひとしくなることを保証しているのである。ここにはタウバー型条件、タウバー型定理がでてこなかったのにである。ではタウバー型条件は関係ないのか？そうでもないようだ。どうも元のフーリエ級数が収束する条件がタウバー型条件と同じであるように思われるのである。

$x=\pi+1$ だけでなく、$0<x<2\pi$ で考察しても同じである。よって(8)の f(x)は(10)の f(x)に一致する。数値的検証は必要なかったともいえる。

直してはまた直し、ということの繰り返しであったがようやく「謎解き」は終わった。

なぜ“1－2＋3－４＋…”＝1／4 なのか？、それは総和法の和であった。なぜ“1＋2＋3＋…”＝－１／12 なのか？それは総和法の和ではないが、総和法に結びついた、いわば疑似総和法、特異総和法の和とでもいうべきものであった。それらの「謎解き」は Part1 で済んでいる。今回の Part2 でフーリエ級数をテーラー級数に変換できる根拠を本当に見つけたと思う。とりあえずまとめれば、それは、アーベル総和法とアーベルの定理、そして解析接続である。いいかえればパーマネントなアーベル総和法と解析接続である。アーベル総和法が本当に痛切に必要とされるという実感は、Part1 より Part2 での方がは

るかに強い。またここでの解析接続は、絶対収束の領域から条件収束の領域への解析接続であって、よく使われる収束領域から複素平面全体への解析接続と違うところが興味深い。そのような(前者の)解析接続を可能にする条件は、g(z)も p(z)も正則であることと、絶対収束する領域 K_0が存在すること、である。ここから、一般化した g(z)にどのような制限が課されるだろうか？という問題が生じる。

今ひとつ興味深いことがある。証明すべき結論 p ＝f(π +1)　‥（21）

を導いたがその根拠は、$\lim_{z\to 1-0} g(z) = \lim_{z\to 1-0} p(z)$　‥（22）である。つまり互いのアーベル和は等しい、ということである。今回の g(z)は収束するフーリエ級数からつくったが、収束しないフーリエ級数から g(z)をつくっても（そのフーリエ級数のアーベル和すなわち $\lim_{z\to 1-0} g(z)$ が存在するなら） $\lim_{z\to 1-0} g(z) = \lim_{z\to 1-0} p(z)$ はいえるのである。

例をあげよう。cosx＋cos2x＋cos3x＋…は収束しない。しかしアーベル和はもちろん存在する。ゆえに（22）によってそれは $\lim_{z\to 1-0} p(z)$ である。計算するとそれは（φ(−2)、φ(−4)、φ(− 6)等々、0 のオンパレードで）−1／2 になる。わりとよく見る等式

cosx＋cos2x＋cos3x＋…＝−1／2　　が得られる。

しかし注意しなければいけない。　左辺は発散級数だから、正しい書き方ではない。
正しくは、A-｛cosx＋cos2x＋cos3x＋…｝＝−1／2

すなわち、“cosx＋cos2x＋cos3x＋…”＝−1／2 である。

$\lim_{z\to 1-0} g(z)$ が存在しても $\lim_{z\to 1-0} p(z)$　が存在しなければやはり(22)はいえない。

例えば、$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cos 2^n x$ を考えると

この級数は収束するが、$\lim_{z\to 1-0} p(z)$ は存在しない。例えば 1−2＋ 4 −8＋16−…のアーベル和は $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ であるが、1＋2＋ 4 ＋8＋16＋…のアーベル和は存在しないからである。だからこの級数はこの方法では転換不可である。
最後に Fejer の定理について。(Fejer の 2 番目の e には ` がついているが省略する。) Fejer の定理は、去年の秋ごろ、勉強したことがある。（高木解析概論とコルモゴロフ函数解析の基礎で）まだ総和法を本格的に勉強する前で、もちろん「行−列転換 OK」の条件など考えていなかった頃だからあまり関係あるものとは考えていなかったけれど、今になってみると実に密接な関係があるように思われる。というか、ひょっとすると Fejer の定理で済んでしまうかもしれない。仮にそうだとしても、この Part1,Part2 での考察が無駄にはならないと思っている。そして、Fejer の定理ではチェザロ 1 次総和法で OK となっている

ところが興味津々である。私の考察ではチェザロ n 次総和法でしかも n→∞まで必要だからアーベル総和法でないとだめ、となるので。
その辺も含めて勉強してからまた発表したい。いまはとりあえず、Part1 の不備の修正こそ急がねばならないと思い、現時点でわかったことを書いた次第である。

２００９年5月 24 日　　杉本明秀