■杉本氏の学習ノート

杉本明秀氏は無限級数に関心を抱き，無限のなす妙にすっかり心を奪われた．チェザロ極限とは平均化処理をした極限のことであるが，彼はチェザロ総和法やアーベル総和法の立場から，なぜ

ζ（−１）＝１＋２＋３＋４＋・・・＝−１／１２

なのかを易しく解説している．

とことん納得のゆく理解をしたくなったら，チェザロ総和法やアーベル総和法は必須のものであろう．氏の許可を得てここに転載する．

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

「学習ノート」

「負整数でのゼータ関数についての謎解き」

― なぜ ζ(−1)＝“1＋2＋3＋…”＝−1／12 なのか？ ―

リーマン・ゼータ関数

$$\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{s}}} = 1 + \frac{1}{2^{\mathrm{s}}} + \frac{1}{3^{\mathrm{s}}} + \cdots \tag{1}$$

は、s を複素数に拡張しても Re(s)＞1 で収束、Re(s)≦1 では発散、ということはよく知られている。ところがオイラーが s が負の整数のときのゼータ関数の値を発見した。例えば s＝－1 では、ζ(－1)＝1+2+3+・・・・＝－1／12 であるという。以降それは解析接続によって正当化され、オイラーの神秘的な等式、とか摩訶不思議な等式とかいわれている。ところが、数学研究者や愛好者の間で、このことに対する対応は様々であって一通りではない。私の知る限り以下の 4 つに分かれているようだ。(以下、ζ(－1)を例にとる。)

① ζ(－1)＝1+2+3+・・・・＝－1／12 とするもの。　去年 (2008 年)の何月かに朝日新聞で、オイラー生誕 200 年記念と銘打って 1 面を取った特集があって、その中で某大学教授が、「無限だって計算できなきゃだめなんだよ」というようなコメントをしていた。大衆向け解説記事だからかと思いきや、岩波講座現代数学の基礎「数論 2」という専門書でも同様であって、さらに P278 では「なお、上記のような発散級数の値を自然が零点振動・真空エネルギーとして計算していることが最近確認されている」というコメントまでのっていて、恐れ入ってしまう。

② ζ(－1)＝“1+2+3+・・・・”＝－1／12 と“　”がつけられているものもよく見られる。ただ、“　”の意味について何の説明もない。

③ 上記岩波の「数論 1」や「数論 3」では、「数論 2」とちがってζ(－1)＝－1／12 とのみ記されている。

④ あまり見かけないが、例えば現代数学社「整数論周遊」では、解析接続の結果、s＝ 1 を除いた全複素平面に拡張されることを示したあとで、「念のため、そこでもζ(s)が $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{s}}}$ で表されているというわけではありません。」というコメントがある。つまり、

ζ(－1)＝－1／12≠1+2+3+・・・　ということである。

私は当初④の立場であった。(正確には去年 2008 年の夏まで)

①は論外であると思う。発散とか収束とかの意味がまったくなくなることについての危機感ゼロである。「自然界で実証された」かのようなコメントは、後述するが、タイムマシンを大真面目に研究する物理学者とおなじくらいナンセンスである。

②は一応“”をつけている点で慎重さが伺えるが、それでも“”の意味が何なのかまったく説明がないのでは根本的に①と変わらない。

③は、①～④のすべての立場の最大公約数を言っているだけ、もちろん正しいといえば正しいが、何の立場も示していないという意味で無内容である、といわざるを得ない。

④は①②③に対して相対的に優位にたっていると思う。④をふまえて新しい⑤の立場を提示するが、やはり④の立場の確認はとても大事だと思う。

①や②は解析接続で正当化されている、とよく言われる。果たしてそうだろうか。

実際、解析接続で

$$\zeta(1-s)=-\frac{B_s}{s} \qquad (2) \qquad (B_s\text{はベルヌーイ数、}s\text{は自然数})$$

が導かれたり、おなじく有名な関数等式

$$\zeta(1-s)=2\times(s-1)!\times\frac{\zeta(s)}{(2\pi i)^s} \qquad (3)\ (s\text{は}2\text{以上の偶数})$$

などが導かれてはいる。

よって、$\zeta(-1)=-\frac{1}{2}B_2=-\frac{1}{12}$ となっても、$\zeta(-1)$が 1 +2+3+・・・というはじめの無限級数の定義の形は保たれているのか、という疑問には到底答えられるものではない。解析接続というのは定義する領域を拡張する有用な手段であるが、拡張するに際して「解析性」を保つような新しい定義は一意に定まる、ということを保証するのが最大の威力であって、発散級数を収束させるような魔力などもちろんないのである。

さて、よく見られる $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ の「証明」に次のようなものがある。

$P_0(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ （一番右は、$|x|<1$ のときのみ。以下同じ。）

として、$P_1(x)=P_0{}'(x)$ とすると、$P_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots$ (4)

$x=-1$ を代入する。$P_1(-1)=1/4=1-2+3-4+\cdots$ この一番右辺は発散でだめだけれど無視して続ける。

$1-2+3-4+\cdots=(1+2+3+\cdots)-2(2+4+6+\cdots)=(1+2+3+\cdots)-2^2(1+2+3+\cdots)=\zeta(-1)--2^2\zeta(-1)=(1-2^2)\zeta(-1)$ (5)

ゆえに、$P_1(-1)=1/4=(1-2^2)\zeta(-1)$

よって、$\zeta(-1)=1/4\times(-1/3)=-1/12$ となる。しかしこれはデタラメである。(4)の最右辺に $x=-1$ を代入することはできない。$\lim_{x\to-1+0}P_1(x)$ をつかってもダメである。

$\lim_{x\to-1+0}(1+2x+3x^2+\cdots)\neq1-2+3-4+\cdots$ なのだから。、

さらに(5)の変形は、発散級数は順序変更禁じ手であるから、これもダメである。求め方としては全くダメダメであるが、ここで発想を転換して、$\zeta(-1)=\frac{P_1(-1)}{1-2^2}$ と定義してみたらどうだろう。そうすると、何もかもOK である。禁じ手満開の変形がまるで OK であるかのような錯覚におちいる。

一般に、s を自然数として$P_S(x)=1+2^S x+3^S x^2+4^S x^3+\cdots$　（右辺は$|x|<1$ のみ）となるような有理関数があれば(☆)

$$\zeta(-s)=\frac{P_S(-1)}{1-2^{1+S}} \qquad \cdots \qquad (6)$$

は負の整数でのゼータ関数の定義拡張となる。問題は、解析接続で導かれた(2)と(6)とが同値であるかどうかである。それはいえるのである。そして、(☆)であるが、そのような有理関数も存在するのである。求め方は$P_1(x)$に x をかけて微分したものを$P_2(x)$とすると、$P_2(x)=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$で　$P_2(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ である。

$P_3(x)=\{xP_2(x)\}'=\dfrac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$　となる。　以下、$Ps(x)=\{xP_{S-1}(x)\}'$ によってつぎつぎ求まる。こうして、係数が自然数 k の s 乗になっている多項式 Ps(x)が

$$Ps(x)=\frac{1+E_{S1}x+E_{S2}x^2+\ldots+x^{S-1}}{(1-x)^{S+1}} \qquad (7)$$

という有理関数で表される。ここで Esr は EulerianNumber と呼ばれ(有名なオイラー数とは違う)　$1+Es1+Es2+\cdots+1=s!$
である。

もう一度(2)と(6)を並べてみる。

$$\zeta(1-s)=-\frac{B_s}{s} \qquad (2)$$ （B_sはベルヌーイ数、s は自然数）

$$\zeta(-s)=\frac{P_S(-1)}{1-2^{1+S}} \qquad (6)$$ （Ps(x)は(7)の有理関数）

どちらも、負の整数でのゼータ関数の定義である。解析接続で導かれたとはいうものの大事なことは新しい有限値での定義だということ。そして(2)より(6)の方が意味がわかりやすい。Ps(x)という有理関数の、x＝－1 における値(もちろん有限値)が負整数のゼータの本質だということである。そして Ps(－1)を無理やり形式的に無限級数展開してゼータ特有の禁じ手の変形を行うとあら不思議$1+2^S+3^S+\cdots$が現れるというわけである。しかしこの$1+2^S+3^S+\cdots$　はあくまでも見かけ上のものでしかない。このことをしっかりおさえることが肝心である。つまり、

$$\zeta(-1)=\frac{1}{\{1-(-1)\}^2}\times\frac{1}{1-2^2}=-\frac{1}{12}$$ なのであって

1+2+3+・・・・＝－1／12 ではないのだ。

ところが、ところが、ところがである。それを確認すれば問題は終わり、とはならないので

ある。問題はそれほど単純ではないのだ。
なんと、1＋2＋3＋…＝－1／12 を使って正しい結果が得られるのである。それどころか 1＋2＋3＋…＝－1／12 を使わないと正しい結果が得られないのだ。つまり、どうしても

1＋2＋3＋…＝－1／12 **でなければならない**ということになるのである。

私がそのことを知ったのは、学者ではないが数学研究者である杉岡幹生氏のホームページでである。杉岡氏は、テイラーシステムというのをオリジナルに開発してζ(3)などの奇数ゼータを偶数ゼータの無限和で求める公式を発見したのである。これはすごいことだ。実に偉大な業績である。氏の求め方を簡単に要約してみよう。

$$f(x)=\cos x+\frac{\cos 2x}{2^3}+\frac{\cos 3x}{3^3}+\cdots \qquad (0<x<2\pi) \tag{8}$$

という母関数 f(x)を考える。(8)の右辺を x＝πの周りでテイラー展開する。二重級数となる。ここで縦に、列で、足していくとゼータの交代級数がでてくる。

$$\begin{aligned} f(x)=&-1+\frac{1}{2!}(x-\pi)^2 \qquad\qquad -\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+\cdots \\ &\qquad +\frac{1}{2^3}-\frac{2^2}{2^3}\frac{1}{2!}(x-\pi)^2+\frac{2^4}{2^3}\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+\cdots \\ &\qquad -\frac{1}{3^3}+\frac{3^2}{3^3}\frac{1}{2!}(x-\pi)^2-\frac{3^4}{3^3}\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+\cdots \\ =&\left(-1+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots\right)\frac{1}{2!}(x-\pi)^2+ \\ &\left(-1+2-3+\cdots\right)\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

ζ(s)の交代級数をφ(s)と書くことにすると、(9)は

$$f(x)=-\phi(3)+\frac{1}{2!}\phi(1)(x-\pi)^2-\frac{1}{4!}\phi(-1)(x-\pi)^4+\cdots \tag{10}$$

となる。この(10)に x＝π／2 を代入して、整理してζ(3)を求めている。φ(3)とφ(1)は収束するので問題はない。問題はφ(－1)である。(そのあと、φ(－3) φ(－5)…が次々出てくる。)ここで当然ながら彼はφ(－1)＝ $(1-2^2)$ ζ(－1) としてζ(－1)＝－1／12 を使っている。(実はそのあと関数等式を使ってζ(－1)、ζ(－3)…をζ(2)、ζ(4)…に変換して偶数ゼータの無限和の形にしている。) こうして得られたζ(3)が全く正しい数値であることも確かめられている。　ここではもろに 1－2＋3－4＋…が出てくるのである。つまりもろに 1＋2＋3＋…が出てきているということであり、1＋2＋3＋…が－1／12 でなければならないことを示しているのである。(注 1)

さあ、最大の謎がここにある。　1＋2＋3＋…＝－1／12 は正しい、①の立場は正しいと認める以外にないのか？杉岡氏のホームページを見たときの衝撃はとてつもなく

大きかったけれども、それでも私には①の立場に移るという考えは全くなかった。もちろん 1＋2＋3＋…＝−1／12 とすることの必要性、有用性はようくわかった。数学者や数学愛好者がそれにこだわる理由がよくわかった。なるほど天才オイラーや天才ラマヌジャンが、1＋2＋3＋…＝−1／12 と確信した理由がよくわかった。だから私もそれを使うことを否定しない。いや、否定などできるわけもない。問題は 1＋2＋3＋…＝−1／12 となぜできるのかその根拠である。有理関数が関係していることは容易に想像される。しかしどんな有理関数なのか、その時点では皆目わからなかった。(2)のベルヌーイ数での定義ではなかなか見えにくい。そうして見つけたのが(6)の有理関数 Ps(x)なのである。

そうして種明かしをする前にはっきりさせなければならないことがある。それは前に（注 1）のところで 1＋2＋3＋…がもろに出てきたと書いたが、正確には、もろに出てきたのは 1−2＋3−4＋…である。本質的に 1＋2＋3＋…も 1−2＋3−4＋…も同じだからどっちでもいいのではと思われるかもしれないけれど、実は大事な違いがあるのである。
負の整数のゼータを考えるとき、φ(−ｓ)＝Ps(−1)としてまずは交代級数を先に定義しているのである。というのは Ps(x)は x＝1 で極であるからζ(−ｓ)を Ps(1)として定義できないからである。だからまずφ(−ｓ)を定義し、次に

$$\zeta(-s)=\frac{\phi(-s)}{1-2^{1+s}} \qquad (6)'$$

としてζ(−ｓ)を決めているのだ。ζ(ｓ)もφ(ｓ)も収束するｓ＞1 において成り立つところの$\zeta(s)=\dfrac{\phi(s)}{1-2^{1+s}}$という関係が保たれた形となっている。　そこで正しくは、問題は、なぜ 1−2＋3−4＋…＝1／4 となるのか、ということになるのである。

さて(8)の母関数 f(x)をようく見るとこれは絶対収束している。ということは二重級数としても絶対収束している。「解析概論」の P174 の解説によれば、二重級数を無数の部分無限級数に分割しても(どのような分割のしかたであれ) 絶対収束の場合、どの部分無限級数も絶対収束するということが保証されている。だから、(10)でのφ(−1)、φ(−3) 、φ(−5)…はすべて有限値でなければならない。

$$\phi(-s)=Ps(-1)=\left\{\frac{1+E_{S1}\cdot x+E_{S2}\cdot x^2+\ldots+x^{S-1}}{(1-x)^{S+1}}\right\}_{x=-1}$$

は、解析接続のお墨付きを得ているから、解析接続の一意性からその有限値はたとえばφ(−1)は 1／4 以外にありえない。そういう、母関数が絶対収束してそこで出てくる発散無限級数は実は見かけ上の発散級数であって実は有限値なのである。だから無条件に 1−2＋3−4＋…＝1／4 とか 1＋2＋3＋…＝−1／12 とかいってはいけないのだ。少し一般化して

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} Ak\cos kx \qquad \cdots \qquad (8)'$$

のような母関数を考えて、Ak によっては、f(x)は絶対収束して、かつ、テイラー展開すると係数に発

散級数が出てきてしまう場合がある。(＊)

そこまで書いたのが 2009 年正月休みのときである。そこで原稿を中断し、今日(2 月 22 日)再び書き始めている。約 1 ヶ月半中断したのにはわけがある。上記推論上で大きな間違いがあることに気づいたからである。それは当初考えていた結論を大きく修正しなければならないものであった。本来ならば全面的に書き直すべきところだが、むしろ当初の間違った結論を提示し、次になぜまちがえたかも提示し、その次にまちがいを正した上で今度こそ本当に正しい結論を提示したほうがいいのではないかと思ったのである。というわけで(＊)の続きを書こう。

係数に発散級数が出てくるが、しかしそれはあらかじめ「収束」が保証されているのである。つまり発散級数は見かけ上の発散級数であって実は有限値なのだ。(収束する、というのでもなくはじめから有限値なものが、見かけ上形式上発散級数となっているのだ。なぜそうなるのか、それはまだ謎である。) このような発散級数を形式的発散級数と名づけ、“ ”でくくることにするといいと思う。そうすると、

“1−2+3−4+…”＝1／4 である。

これが当初のまちがった結論であった。

では次に、どこでまちがえたのかである。それは「 さて(8)の母関数 f(x)をようく見るとこれは絶対収束している。ということは二重級数としても絶対収束している。」という箇所である。

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\cos kx=\cos x+\frac{\cos 2x}{2^3}+\frac{\cos 3x}{3^3}+\cdots \qquad (8)$$

はたしかに $\frac{1}{k^3}\cos kx$ を各項として考えると絶対収束しているが、coskx をテーラー展開して二重級数として考えたときには実は絶対収束しないことがわかるのである。

だから、そのあとの結論、係数に出てくる発散級数はあらかじめ有限値であることが保証されている、というのがいえなくなるのである。「はじめから有限値なものが、見かけ上形式上発散級数となっているのだ。」それはまちがいであった。またしても問題はそれほど簡単、単純ではなかったということだ。

そこで、次の、本当に正しい結論を導くにあたって、問題を整理しなければならない。(8)の母関数 f(x)が二重級数としては絶対収束しないけれども、収束することはまちがいない。しかし条件収束だから項の順序を勝手に変えてはいけないというのは大原則である。しかし順序を変更して導かれた(10)すなわち、

$$f(x)=-\phi(3)+\frac{1}{2!}\phi(1)(x-\pi)^2-\frac{1}{4!}\phi(-1)(x-\pi)^4+\cdots \qquad (10)$$

この正しさは確かめられている。もちろん論理的にはまちがった推論でも正しい結論が得られる場合がある。しかし、上の場合そういうたぐいではなく(10)の正しさを保証する根拠があるはずだ、あるに違いない、と考え勉強し直した。つまり二重級数として条件収束する(8)

を、なぜ順序変更して(10)としてよいのか、ということ。順序変更が許される条件は何なのか、これが新たな問題となったのである。

そこで勉強し直してわかったことは、総和法というものがあるということである。しかし高木「解析概論」にしても、コルモゴロフ「函数解析の基礎」にしても、総和法についてはさわり程度しかのっていない。そうこうするうちブログで、総和法について一番詳しいのは、石黒一男「発散級数論」(森北出版)だというのが出ていて、絶版だったけれど運良く図書館の倉庫にあるのを見つけて勉強することができた。

以下、総和法について述べることにする。

思い切って平たく言えば、総和法とは、発散級数をまるで「収束」させてしまうかのように思わせる計算法だといっていいだろう。結構そんなようなものとして広められているから問題だが、本当は収束するわけではない。でも別に収束概念を緩めたり拡張したりしているわけではないのだけれど、結果的にはあたかもそのように見えるのである。だから総和法についての理解は本当に重要である。

最初の総和法はチェザロによって求められた。

級数$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$について、その部分和S_nを考え、

$$t_n = \frac{S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n+1}$$

という算術平均を考える。新しい数列$\{t_n\}$がSに収束するとき、$\{S_n\}$はチェザロ一次総和法でSに総和可能といい、

$(C, 1)\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = S$と書いたり、$(C, 1)\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$と書く。

たとえば、$\phi(0) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$は収束しないが(C, 1)総和法で$\phi(0)$は1／2に総和可能である。

$$t_n = \frac{nS_0 + (n-1)S_1 + \ldots + 2S_{n-1} + S_n}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

という加重平均を考えると、これがチェザロ2次総和法(C, 2)総和法である。これによって$\phi(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$という発散級数が1／4に総和可能である。((C、1)では不可である。)このようにして、どんな自然数sに対しても$\phi(-s) = 1^s - 2^s + 3^s - 4^s + \ldots$という発散級数が(C, s+1)総和法で総和可能ということになる。しかしチェザロ総和法でも、総和可能なのは$\phi(-s)$であって(ディリクレーのL関数までOKだが)、$\zeta(-s)$は不可能である。

次に有名なのがアーベル総和法。

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$が与えられて、もし$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$が$|x| < 1$で収束し、かつ$\lim_{x\to 1-0} f(x) = s$のとき、$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$はsにアーベル総和可能といい、$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$と書く。

これだと　　　　$\phi(0)=1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ については

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots$ は $|x|<1$ で収束だから、

$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$ で、よって　$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n==\frac{1}{2}$ となる。

アーベル総和法は実はもうすでにお目にかかっている。あの Ps(−1)がそうである。

$P_S(x)=1+2^S x+3^S x^2+4^S x^3+\cdots$　（右辺は $|x|<1$ のみ）

$=\frac{1+E_{S1}x+E_{S2}x^2+\ldots+x^{S-1}}{(1-x)^{S+1}}$　　（$x\neq 1$）

下は x＝1 で極だが、x＝1 以外の収束半径上では値をもち、従ってたとえば

$\lim_{x\to -1-0} Ps(x)=A\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^s=A\text{-}\phi(-s)=Ps(-1)$ $\{=\frac{1-E_{S1}+E_{S2}-\ldots+(-1)^{S-1}}{2^{S+1}}\}$

つまり、負整数でのゼータ関数の交代級数 φ(−s)を Ps(−1)で定義したときに、すでにもうアーベル総和法が使われていたのである。だから φ(−1)＝１−2＋3−4＋…＝1／4 という書き方には、この時点で、間違いであると指摘することができる。

$\phi(-1)=P_1(-1)=1/4$ であることはそうなのだが、１−2＋3−4＋…はアーベル総和法によって 1／4 に総和可能であるという意味であって、このことが区別されず混同されているのである。つまり正確には φ(−1)＝A‐“１−2＋3−4＋…”＝1／4 ということなのだ。１−2＋3−4＋…が 1／4 に収束するといってはやはりまちがいなのである。では一体、総和法は何のためなのだ、どういう役割、どういう有用性があるのだ、という疑問が当然生じてくる。その答えは最後に明らかにされる。まだまだあとのお楽しみ、である。

任意の k でチェザロ k 次総和可能な級数はアーベル総和可能である。しかしその逆はいえない。つまりアーベル総和可能であってチェザロ k 次総和可能でないものが存在する。たとえば $e^{\frac{1}{1+X}}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ $(0\leqq x<1)$で定義される級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ はそうである。それをチェザロ総和法より、アーベル総和法の方が強いという。（C、k）⊂A とも書く。そのアーベル総和法でも、ζ(−s)は不可能である。ほかにも、いろいろな総和法がある。
オイラー総和法、ボレル総和法、ネールント総和法、ハウスドルフ総和法等々。しかし当面する問題を解明するにはアーベル総和法で十分である。（アーベル総和法にもレベルがあって $A_0, A_1, \ldots A_k$,　とありいままでのアーベル総和法は実は A_0 なのである）

総和法というものの定義はきわめてゆるやかで要するに数列なり級数なりをある有限数値 s

に対応させる方法であり、写像である、ということだけである。だから総和法にもピンからキリまであってそれこそ玉石混交である。しかし、やはり総和法として有用かつ重要なのは、次の条件を満たすものであろう。すなわち、V-総和法があって、

①級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が s に収束するならば V- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ＝ t である。　　つまり、ふつうに収束するものが V-総和法で発散してしまうことはない。 s と t は違うことが許されても…。

このとき総和法 V はコンサーバティブ（またはセミレギュラー半正則）という。（コンサーバティブの意味は「保存」）

②　　上で s＝t のとき、V をパーマネント（またはレギュラー正則）という。（パーマネント意味は「不変」）

やはりパーマネントであることが一番大事で、上にあげた種々の総和法はすべてパーマネントである。そして V-総和法がパーマネントであるための必要十分条件は何かということは基本的、中心的研究テーマのようだ。そのように V がパーマネントであることを保証するような定理をアーベル型定理という。逆にある総和法で $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が s に総和可能ならば

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は s に収束するか？

これはもちろん明らかにノーである。しかし

「$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ がある総和法で値 s に総和可能でかつ u_n がある付帯条件を満足するならば

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ＝s である。」というような形の定理はあるのである。このような形の定理はタウバー型定理といって、その u_n に関する付帯条件をタウバー型条件という。

アーベル総和法に関するタウバー型条件に例えば次のような付帯条件がある。

$u_n = o(\frac{1}{n})$ すなわち $\lim_{n\to\infty} n \times u_n = 0$

ほかにももっと弱い条件が求められているが、とりあえずここまでで問題を解明するためのお膳立てはそろった。

さあ、問題をもう一度わかりやすい形で定式化することにしよう。そのためにまだまだ準備することがある。

まず、(8)の　　$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cos kx$ を二重級数に展開するときの部分和 $f_n(x)$ を考える。

そして、$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$　　　(11)　という形に $u_n(x)$ を具体的に構成しなければならない。簡略化して、x=1＋π で考えることにする。すなわち x－π＝1

だから、(8)からつくられる二重級数の(x－π)の係数だけの級数となる。それをf_nとする。$u_n(x)$も同様にしてu_nとする。すなわち

$f_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ （12）である。次に、u_nの具体的な作り方である。そのためにまず、二重級数を行列のような形に表す。

	1	2	3	4	…	m	…
1	-1	$+\frac{1}{2!}$	$-\frac{1}{4!}$	$+\frac{1}{6!}$	…	$\frac{(-1)^{m}}{(2m-2)!}$	…
2	$+\frac{1}{2^3}$	$-\frac{1}{2!}\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4!}2$	$-\frac{1}{6!}2^3$	…	$\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-2)!}2^{2m-5}$	…
3	$-\frac{1}{3^3}$	$+\frac{1}{2!}\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4!}3$	$+\frac{1}{6!}3^3$	…	$\frac{(-1)^{m+2}}{(2m-2)!}2^{2m-5}$	…
4	$+\frac{1}{4^3}$	$-\frac{1}{2!}\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4!}4$	$-\frac{1}{6!}4^3$	…	$\frac{(-1)^{m+3}}{(2m-2)!}2^{2m-5}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
k	$\frac{(-1)^{k}}{k^3}$	$\frac{(-1)^{k+1}}{2!}\frac{1}{k}$	$\frac{(-1)^{k+2}}{4!}k$	$\frac{(-1)^{k+3}}{6!}k^3$	…	$\frac{(-1)^{k+m-1}}{(2m-2)!}2^{2m-5}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

各項を$a_{k,m}$と書くことにすると$a_{k,m} = \frac{(-1)^{k+m-1}}{(2m-2)!}2^{2m-5}$ である。そして、u_nの決め方である。

	1　2　3　…	2n	2n+1	…
1 2 3 ⋮		↑ β_{2n}	↑ β_{2n+1}	
n	← α_n →	↓	↓	…
⋮				

左の灰色部分を全部加えたものをu_nとするのである。そしてさらに左図のようにα_nとβ_{2n}とβ_{2n+1}とに分ける。すなわち、

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{2n-1} a_{n,i} \qquad \beta_{2n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2n}$$

$\beta_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2n+1}$ で $u_n = \alpha_n + \beta_{2n} + \beta_{2n+1}$ （13）である。

どうしてこのような作り方なのか、というのはやはりわけがあって、右のように$u_n = \alpha_n + \beta_n$ （14）のように作ると形はわかりやすいけれども実はタウバー型条件を満たさない

	1,2,3　…	n	…
1 2 ⋮		↑ β_n	
n	← α_n →	↓	
⋮			

のである。(13)の形のu_nしかタウバー型条件を満たさない、というわけではないけれど、とにかく(14)の形ではだめなのである。ここは非常に四苦八苦したところで、とにかくやっと見つけた、というもので、(14)がダメな理由、(13)がＯＫな理由はあとで述べる。

(13)で$u_n = \alpha_n + \beta_{2n}$とせず$u_n = \alpha_n + \beta_{2n} + \beta_{2n+1}$とした理由は簡単でそうしないともれなく加えるということができなくなるからである。$u_n = \alpha_n + \beta_{2n}$として$u_{n+1} = \beta_{2n+1}$としても、もれなく加えられるけれどもやはり見栄えが悪い。

次に、$\phi(-s) = 1 - 2^s + 3^s - \cdots$の第 n 部分和も$\phi_n(-s)$としておく。するとあきらかに

$$f_n = -\phi_n(3) + \frac{1}{2!}\phi_n(1) - \frac{1}{4!}\phi_n(-1) + \frac{1}{6!}\phi_n(-3) - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-2)!}\phi_n(5-2n) \qquad (15)$$ である。

これで完全にお膳立てはそろった。

謎解きのための最大の鍵は、先述したアーベル総和法に関するタウバー型定理である。

まず、f_nがアーベル総和法で、例えば有限値 f に総和可能であることを証明する。

つぎに二重級数としての具体的な構成法$f_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$で$u_n$がタウバー型条件$\lim_{n\to\infty} n \times u_n = 0$を証明する。そうすると、定理により$f_n$は実は f に収束するということが結論づけられるのだ!!　それによって(8)のフーリエ級数を(10)のテーラー級数に転換してもよいということが保証されるのである。では最初に(12)(15)のf_nがアーベル総和法によって総和可能であることを証明する。それには(15)が使われる。$n \to \infty$のとき、(15)での$\phi_n(3)$、$\phi_n(1)$は収束して問題はないが、$\phi_n(-1)$、$\phi_n(-3)$、$\phi_n(-5)$、…は本来振動的に発散して収束しないから、収束を考えるとダメである。しかし、アーベル総和法で考えるとすべて総和可能である。アーベル総和法の加法性 $A\text{-}\{s_n + t_n\} = A\text{-}\{s_n\} + A\text{-}\{t_n\}$は保証されているので$f_n$がアーベル総和可能かどうかは、各項のアーベル総和法による和の無限和が収束するかどうかにかかっている。すでに確認したようにアーベル総和法によって$\phi_n(-1)$、$\phi_n(-3)$、$\phi_n(-5)$、…はそれぞれ$\phi(-1)$、$\phi(-3)$、$\phi(-5)$　…が和となる。$\phi_n(3)$と$\phi_n(1)$もアーベル総和法での和は$\phi(3)$と　$\phi(1)$だから

$$A\text{-}\{f_n\} = -\phi(3) + \frac{1}{2!}\phi(1) - \frac{1}{4!}\phi(-1) + \frac{1}{6!}\phi(-3) - \cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n-2)!}\phi(5-2n)$$ （16）となる。この(16)の右辺のｎ→∞のときの収束を検討する。(7)の Esr は正の整数であることが明白なので　$|\phi(-s)|=|Ps(-1)|=\left|\frac{1-E_{s1}+E_{s2}-\cdots+(-1)^{s-1}}{2^{s+1}}\right|\leqq\frac{s!}{2^{s+1}}$ である。

つまり(16)右辺の第ｎ項の絶対値は、

$$\left|\frac{\phi(5-2n)}{(2n-2)!}\right|\leqq\frac{(2n-5)!}{2^{2n-4}}\frac{1}{(2n-2)!}=\frac{(2n-5)(2n-4)(2n-3)}{2^{2n-4}}$$ で

あり　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\text{第}n\text{項}|}\leqq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-5)(2n-4)(2n-3)}{2^{2n-4}}}=0$ だから圧倒的に絶対収束することがいえる。

和を f とすると、結局アーベル総和法を適用して A-$\{f_n\}=f$　がいえたことになる。

次にタウバー型条件　$\lim_{n\to\infty}nu_n=0$　であることを示そう。

$u_n=\alpha_n+\beta_{2n}+\beta_{2n+1}$　であった。だから、$nu_n=n\alpha_n+n(\beta_{2n}+\beta_{2n+1})$ である。

$n\alpha_n$ と $n(\beta_{2n}+\beta_{2n+1})$ とで分けて考察する。$n\alpha_n$ についてはわりと簡単である。なぜなら、cos nx を第(２n－１)項までテーラー展開したものの残り、剰余項を R とすれば、　$\alpha_n=\frac{(-1)^n}{n^3}\{\cos nx-R\}$ となるからである。$n\to\infty$ で $n\alpha_n\to0$ は明らかである。次に $n(\beta_{2n}+\beta_{2n+1})$ について。これが大変なのだ。β_{2n} の最終項の $|a_{n,2n}|=\frac{n^{4n-5}}{(4n-2)!}$ で、β_{2n+1} の最終項の $|a_{n,2n+1}|=\frac{n^{4n-3}}{(4n)!}$ である。

$$\beta_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{k^{4n-5}}{(4n-2)!}=\frac{1}{(4n-2)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^{4n-5}$$ で $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^{4n-5}$ は、n の(４n－５)次式となる。(交代級数でなければ次数がひとつ上がるが、仮に上がったとしても結論には影響しない。)同様に、β_{2n+1} の方の $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^{4n-3}$ は n の(４n－３)次式となる。

結局、$n\to\infty$ での $n(\beta_{2n}+\beta_{2n+1})$ を考察するには

$$n\times\left\{\frac{n^{4n-5}}{(4n-2)!}-\frac{n^{4n-3}}{(4n)!}\right\}\cdots$$ （17）を吟味すればよいことになる。(17)は

$\dfrac{n(4n)(4n-1)n^{4n-5}-n\ n^{4n-3}}{(4n)!}$ で 分子はｎの(４ｎ－２)次式。よって、$\dfrac{n^{4n-2}}{(4n)!}$ を考察する。

ｎ!を近似するスターリングの公式によると

$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ である。よって$(4n)!\sim\sqrt{2\pi}(4n)^{4n+\frac{1}{2}}e^{-4n}$ だから、

$\dfrac{n^{4n-2}}{(4n)!}\sim\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{n^{4n-2}}{4^{4n+\frac{1}{2}}}\dfrac{e^{4n}}{n^{4n+\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}n^{\frac{5}{2}}}\left(\dfrac{e}{4}\right)^{4n}$ となる。$n\to\infty$ で$\left(\dfrac{e}{4}\right)^{4n}\to 0$ だから

$\dfrac{n^{4n-2}}{(4n)!}\to 0$ がいえる。ゆえに、$n(\beta_{2n}+\beta_{2n+1})\to 0$ がいえた！よって$n\to\infty$ のとき、

$n\,u_n\to 0$ である!!

（前の(14)のu_nの作り方（$\alpha_n+\beta_n$）がダメな理由は$\left(\dfrac{e}{4}\right)$のところが$\left(\dfrac{e}{2}\right)$となってしまって発散してしまうからである。）

こうしてようやく、タウバー型定理の条件を満たすことによって、f_n は f に収束することが言えた。よってアーベル総和法をつかった

$f=-\phi(3)+\dfrac{1}{2!}\phi(1)-\dfrac{1}{4!}\phi(-1)+\dfrac{1}{6!}\phi(-3)-\cdots$ は OK である。

$x=1+\pi$ で検討したが、$0<x<2\pi$ で検討しても同様の結果が得られる(はずである)。

すなわち、$f(x)=-\phi(3)+\dfrac{1}{2!}\phi(1)(x-\pi)^2-\dfrac{1}{4!}\phi(-1)(x-\pi)^4+\cdots$ である。

以上で謎解きは終わった。結論をまとめよう。それがＰ３で述べたあたらしい⑤の立場ということになる。

1）なぜ １－2＋3－4＋…＝1／4　なのか？

これはもちろんイコールではない。総和法による変換である。いわばアーベル変換といってもいい。収束ではない。だから、総和法による和としての意味をこめて“　”を使えば、“1－2＋3－4＋…”＝1／4 が正しい表記となる。そういう風な説明があれば納得であるが、私の見る限りお目にかかったことがない。(もちろん石黒氏の「発散級数論」ではそのことは明らかだが、ただそのような「通俗的」な説明はない。)

2）ではなぜ“1－2＋3－4＋…”＝1／4 などとする必要があるのか？これはつまり、総和法などというものをどうして考える必要があるのかということだ。それはもうこれまでの経緯から明らかになったと思う。

杉岡氏の変形すなわち、フーリエ級数からテーラー級数に変換するにあたってそのままでは１－2＋3－4＋…は発散するから、変換不可である。それを可能にしたのが総和法

である。パーマネントな総和法の威力である。その威力を保証するのがタウバー型定理だ、ということである。タウバー型条件を満たすことがわかっていれば、まず総和法による和を求めてよい、ということ。なぜなら総和法による和こそ、実は、収束による和と一致するというのがタウバー型定理だからである。“1－2＋3－4＋…”＝1／4 を使ってよい。いや、使わなければ f は求められない。その謎は、結局タウバー型定理によって解明された。杉岡氏の成果を保証する根拠は、よく言われるような「解析接続」ではなく、総和法とタウバー型定理だったということ、それが結論である。

3) ζ(－1)＝1＋2＋3＋…＝－1／12 についてはどうか？

今まで調べた限りで、ζ(－1)＝1＋2＋3＋…についてはどんなパーマネントな総和法でも総和可能ではない、和は求まらない、ということのようである。和が求まる総和法は（それはもちろんあるのだけれど）ぜったいパーマネントではない、ということ。パーマネントであるための必要十分条件というのが一方の重要なテーマだからおそらくそのことは証明されているはずである。そうするとζ(－1)＝1＋2＋3＋…＝－1／12 とは一体何なのか？もうすでに明らかであった。(6)である。s を 0 または自然数として、

$$\zeta(-s)=\frac{P_s(-1)}{1-2^{1+s}} \qquad \cdots \qquad (6) \qquad (Ps(x)は(7)の有理関数)$$

であった。アーベル総和法を使った Ps(－1)をφ(－s)の定義としたことから（6）は

$$\zeta(-s)=\frac{\phi(-s)}{1-2^{1+s}} \qquad \cdots \qquad (6)'$$

となるが、ここでφ(－s)は総和法というしっかりした裏付けがあるのに対して、ζ(－s)はただφ(－s)から(6)′で結びついているに過ぎない。ただ解析接続によってお墨付きを得ているだけなのだ。もちろん総和法も解析接続の一種、解析接続の一部といえるかもしれない。そうだとしてもやはり解析接続一般に威力があるわけではない。本当に威力があるのは総和法プラスタウバー型定理であり、本当に内容のあるのはφ(－s)の方だということである。ζ(－s)はφ(－s)から形式的に決まる存在でしかないということをしっかり確認する必要がある。

だから　“1＋2＋3＋…”＝－1／12 とするのは、厳密にいえば問題なのだけれどまあそういう確認をおさえた上で“　”を使えばいいと思う。

さて、話は脱線するが、そうなると別の疑問が生じる。かのリーマン予想である。s＝1 以外の全複素平面に sを拡張して解析接続したζ(s)においてζ(s)＝0 となるのは、自明なゼロ点を除いてすべて Re(s)＝1／2 上にあるという、あの予想である。ζ(s)は Re(s)≦１で発散で、だからその領域ではまずφ(s)を定義し、つぎに(6)′でζ(s)が決められたのだった。たとえば、s＝1／2 では

$$\zeta(1/2)=\frac{1}{1-2^{1-\frac{1}{2}}}\,\phi(1/2)$$ となる。すなわち、

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots \quad =\frac{1}{1-\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots\right)$$

である。もちろん左辺は本来は発散である。

先ほどは Re(s)≦1 でのζ(s)など何の裏づけもなければ内容もない形式的存在だなどとこきおろしたが、ならばそんなζ(s)のゼロ点がすべて実部が 1／2 であるなどということにどんな意味があるのか、という疑問である。疑問はすぐ解ける。というのはζ(s)は Re(s)≦1 で発散だが、交代級数のφ(s)は 0＜Re(s)≦1 でも収束するからである。 φ(s)は Re(s)≦0 で発散となりそこからは総和法の出番となった。そして(6)′ で明らかなように、ζ(s)のゼロ点とφ(s)のゼロ点とは完全に一致するから 0＜Re(s)＜1 でのζ(s)のゼロ点の研究とは、すなわち収束級数φ(s)のゼロ点の研究であって、それは完全に内容のある、裏づけのあることだったわけである。

4) 要するに“1－2＋3－4＋…”＝1／4 は、数学的便法であり、数学上の技法、テクニックである。天才オイラーや天才ラマヌジャンたちが発見したこの便法、技法をそういうものとしてしっかり受け継ぎ広めていくべきであると思う。その意味で、自然界であたかも実証されているかのようなコメント（P2 の①）は厳に慎むべきであると思う。

こういう結論はすでにタウバーによって絶対に獲得されていたものであるはずである。彼が謎を解いたといってもいい。そして発散級数論の研究者にとっては常識的なことに違いない。にもかかわらず不思議なのは、それが数学愛好者はともかく数学者の間においても広まってはいない、ということなのである。そして石黒氏の「発散級数論」にも内田虎雄氏の「発散級数論」にもそういう内容そういう結論が具体的には書かれていないのが、不思議であり不満である。通俗的なことがらだということなのであろうか、そういうのは通俗書、啓蒙書にまかせようということなのであろうか。しかしそういう書には全くでていないのである。だから、そういう現状を考えれば、すでにどこかで誰かが同様の結論を発表していたとしても、あえてこの「学習ノート」を発表することに意義はあるとおもう。

2009 年 3 月 5 日 杉本　明秀　記

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝