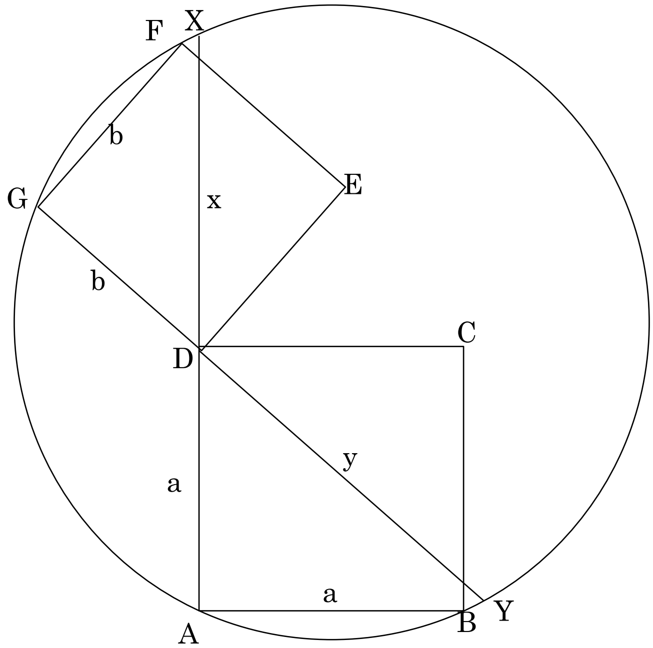
和算にまなぶ（14）

「新解説・和算公式集　算法助術」（土倉保編著、朝倉書店 2014 年刊）No.33

竹貫登興多による別証明より

中川宏

正方形 ABCD の一辺 AD の延長が円(半径 r)と交わる点を X,正方形 DEFG の一辺 GD が円と交わる点を Y とする。



三角形ABXと三角形GYFは直角三角形であるから、

$a^2+(a+x)^2=(2r)^2$

$b^2+(b+y)^2=(2r)^2$

よって、

$x^2+2ax+2a^2=y^2+2by+2b^2$

また、∠ADB＝∠GDX でもあるから、三角形 DAY と三角形 DGX は相似。よって、

AD：DY＝GD：DX　つまり、

$ax=by \quad y=\frac{ax}{b}$

これを先の式に代入すると、

$b^2+2a^2b^2-a^2x^2-2b^4=0$

$(b^2-a^2)(x^2-2b^2)=0$

$a\neq b$ であるから、

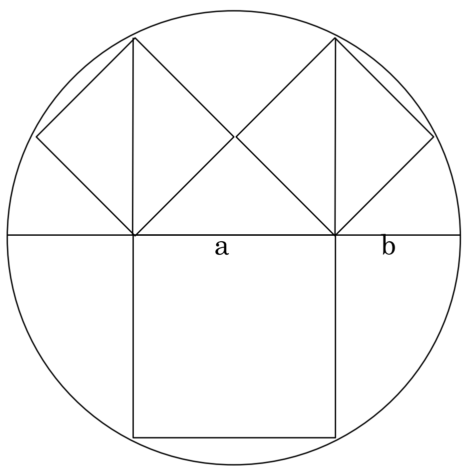
$x=\sqrt{2}b$

もし、DX も DF も$\sqrt{2}b$ であるとすると、三角形 DXF は弦 XF を底辺とする二等辺三角形となるが、底辺の垂直二等分線は円の中心を通ることになってしまい矛盾する。よって、点 X は点 F と一致する。同様に点 Y は点 B と一致する。

このことから、CE を一辺とする正方形も円に接するのは、図のような場合に限ることがわかる。

円の半径を 1 とし、大きな正方形の一辺を a とすると、

$\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=1$ より



$a=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$b=1-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{5-\sqrt{5}}{5}$

$\frac{a+b}{a}=\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\tau$