和算にまなぶ（９）

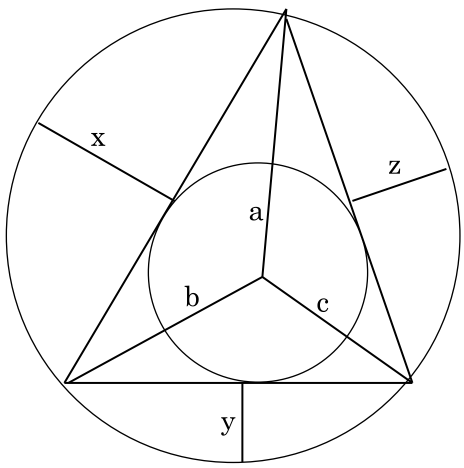
「新解説・和算公式集　算法助術」（土倉保編著、朝倉書店 2014 年刊）No.30 より

中川宏

定理

右のように任意の三角形の外接円と内接円があるとき、

abc＝8xyz



abc＝8xyz

証明

「算法助術」では、a^2＝4xz というかたちで示されている。

土倉先生による解説がすばらしい。

BO は∠B の２等分線であるから、線分 z の外接円周上の

点 D は BO の延長線上にある。弧 AD＝弧 DC

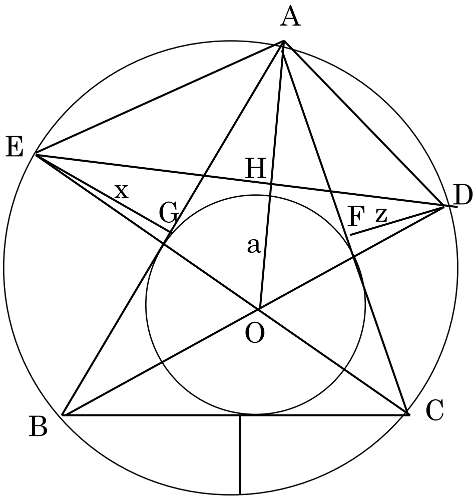
よって、∠AED＝∠DEC＝∠DAC

同様に､線分 x の外接円周上の点 E は CO の延長線上にある。

弧 AE＝弧 EB

よって、∠ADE＝∠EAB＝∠ECB

また、AO は∠A の二等分線であるから、∠BAO＝∠OAC



三角形 EOA において、

∠EOA＝∠OCA＋∠OAC

∠EAO＝∠EAB＋∠BAO＝∠ECB＋∠OAC

　＝∠OCA＋∠OAC

よって、∠EOA＝∠EAO の二等辺三角形であるから∠E の二等分線 EH⊥AO

∠AEH(D)＝∠DAC であるから、直角三角形 AEH は直角三角形 DAF と相似。

したがって、$\frac{AH}{DF}=\frac{AE}{DA}$

同様に、直角三角形 AEG は直角三角形 DAH と相似であるから、

$\frac{AH}{EG}=\frac{AD}{AE}$

よって、$\frac{AH}{DF}\frac{AH}{EG}=1$

AH＝$\frac{a}{2}$　であるから、

$a^2 = 4xz$

同様にして、

$b^2 = 4xy$

$c^2 = 4yz$

も示すことができる。

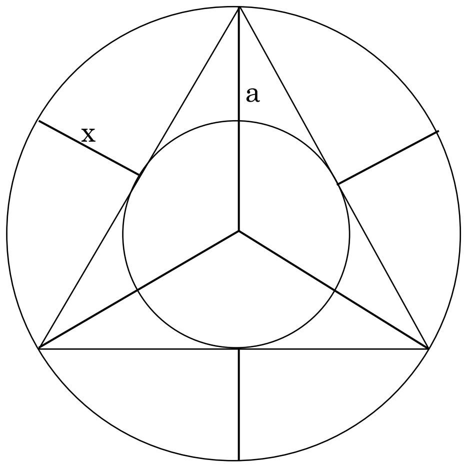
よって、

$a^2 b^2 c^2 = 64x^2y^2z^2$

したがって、

$abc = 8xyz$

意外な結果なので少し確かめてみよう。



正三角形の場合は、

$a = 2x$

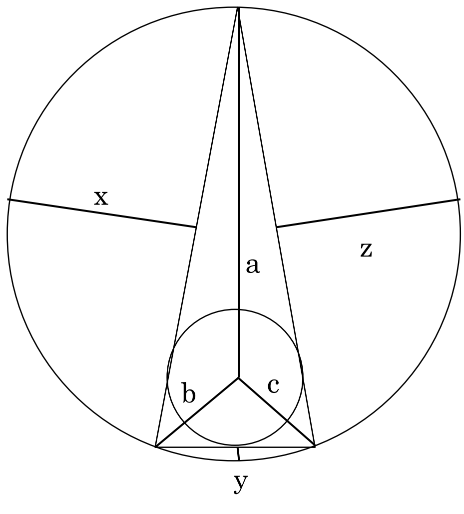
であるから、

$a^3 = 8x^3$

極端に細い二等辺三角形の場合

a は直径に近づき、ｂ、ｃはゼロに近づく。

ｘ、ｚは半径に近づき、ｙはゼロに近づく。



$abc = 8xyz$

変形して、$y = \frac{abc}{8xz}$

外接円の半径を１としたとき、

$\frac{a}{xz}$ は２に近づくから、ｙは$\frac{bc}{4}$ に近づく。

もし、$b=c=\frac{1}{100}$ の場合は、

$y = \frac{1}{40000}$ 　に近づくことになる。

とても図示できないような隙間である。

しかし三角形 OBC はけっしてひしゃげることはなく、直角二等辺三角形に近づくと思われる。