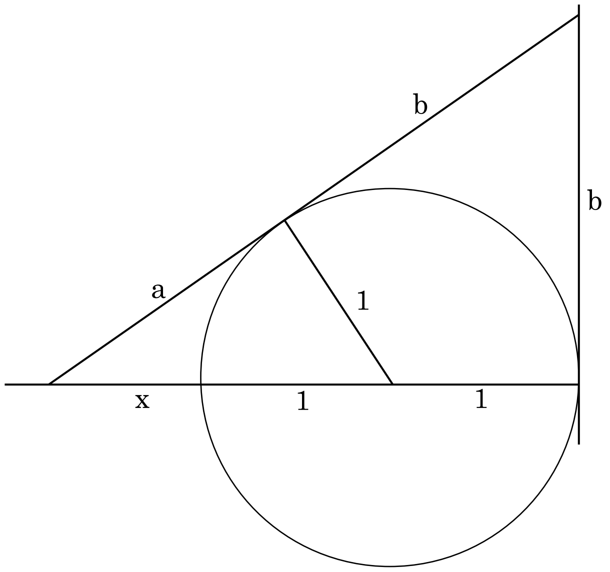
問題 75「黄金分割」(H.ヴァルサー著、蟹江幸博訳、共立出版 2002 年刊)

中川宏

内接円の半径が 1 の二等辺三角形の等辺が最小の時、
底辺から頂点までの長さはいくらか？



$1 : a = b : x+2$　よって、$ab = x+2$

$1 : 1+x = b : a+b$　よって、$a = bx$

代入して、$b^2x = x+2$

よって、$b^2 = 1 + \frac{2}{x}$

また、$a^2 = (x+1)^2 - 1$

これらから、

$F(x) = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$= x^2+2x+1+\frac{2}{x}\ +2(x+2)$

$= x^2+4x+\frac{2}{x}+5$

微分すると

$F'(x) = 2x+4-\frac{2}{x^2}$

$F'(x) = 0$ となるのは、

$x^3+2x^2-1=0$ かつ $x>0$ のとき

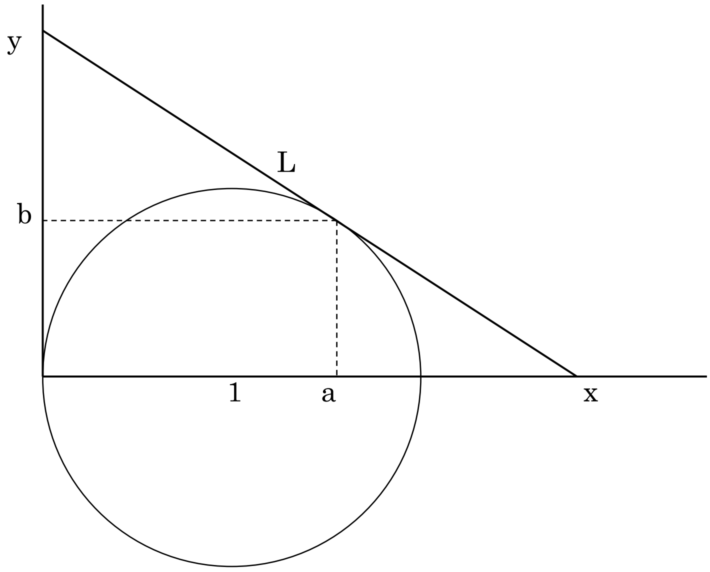
$x^3+2x^2-1=(x+1)(x^2+x-1)=0$ から、

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって、求める長さは

$x+2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \tau^2$

変数の置き方を変えてみる。



円：$(x-1)^2+y^2=1$

接線：$(a-1)(x-1)+by=1$

$x=0$ のとき、$y=\frac{a}{b}$

$y=0$ のとき、$x=\frac{a}{a-1}$

$L^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2$

ところで、$b^2=1-(a-1)^2=a(2-a)$であるから、

$L^2=\frac{a^2}{a(2-a)}+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2=\frac{a}{(2-a)(a-1)^2}$

$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ のとき、$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ という公式を利用して、

$F'(L^2)=\frac{2(a-1)(a^2-a-1)}{\{(2-a)(a-1)^2\}^2}$

$1<a<2$ であるから、

$F'(L^2)=0$ となるのは、

$a^2-a-1=0$ のとき、つまり、$a=\tau$

したがって、底辺から頂点までの高さはτ^2

いずれにしても、微分なしに解けない。

訳者が、微分を使わないで済む解法があれば教えてほしいといっているのですが、いかがでしょうか？