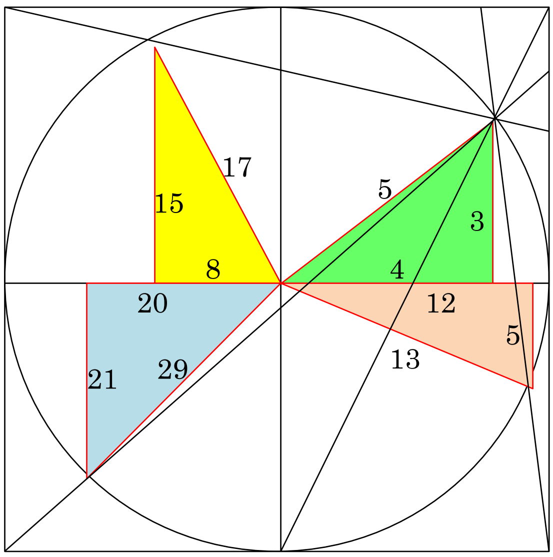
ピタゴラスの三角形の座標的生成法

中川宏

正方形のｎ等分点と頂点とを結ぶ線分によってピタゴラスの三角形を描く方法によっては、長いほうの二辺の差が１あるいは２のタイプのものしか作れない。
下表においてｎの値が空欄のピタゴラスの三角形をも含めてすべてのピタゴラスの三角形を作図する方法が、細谷先生の「ピタゴラスの三角形とその数理」に紹介されている。

n	a	b	c	n	a	b	c	n	a	b	c
3	4	3	5		33	56	65	17	32	255	257
4	3	4	5		55	48	73	18	17	144	145
5	8	15	17	13	24	143	145		51	140	149
6	5	12	13	14	13	84	85		85	132	157
	21	20	29		77	36	85		119	120	169
7	12	35	37		39	80	89		165	52	173
8	7	24	25		65	72	97	19	36	323	325
9	16	63	65		91	60	109	20	19	180	181
10	9	40	41	15	28	195	197		57	176	185
	45	28	53	16	15	112	113		153	104	185
11	20	99	101		117	44	125		95	168	193
12	11	60	61		105	88	137		133	156	205

細谷先生がコンウェイから直接教わったと紹介されていることによれば、
正方形の底辺の中点と右上の頂点を結ぶ線分が内接円と交わる点が３：４：５の三角形（緑色）を表し、その点と正方形の他の３頂点とを結ぶ線分が円と交わる点がそれぞれ図のように８：１５：１７の三角形（黄色）、２０：２１：２９の三角形（青色）、５：１２：１３の三角形（赤色）を表す。そして黄色の三角形の頂点と正方形の３頂点を結ぶ線分と円の交点、次に青い三角形の、赤い三角形のと順次つなげていくと、全てのピタゴラスの三角形が網羅されるという。



このような変換は、

$$U\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}\quad A\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\quad D\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

という３種類の行列式を、[3 4 5]という元祖行列に掛けることとして定義することができるそうだ。（バーニングとホールの系統樹、1970 年）