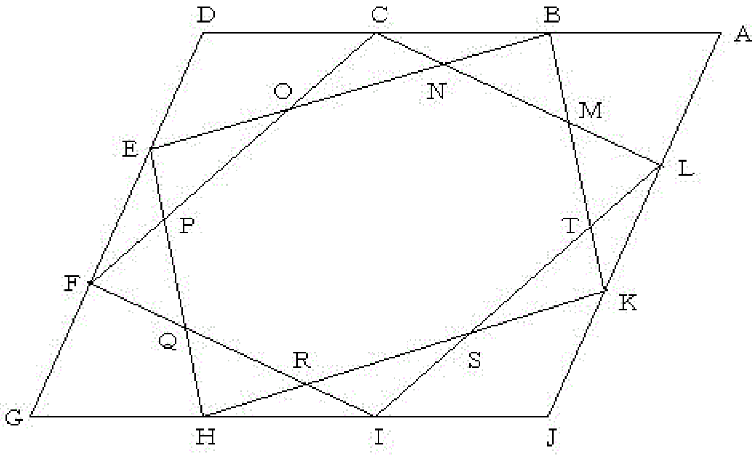
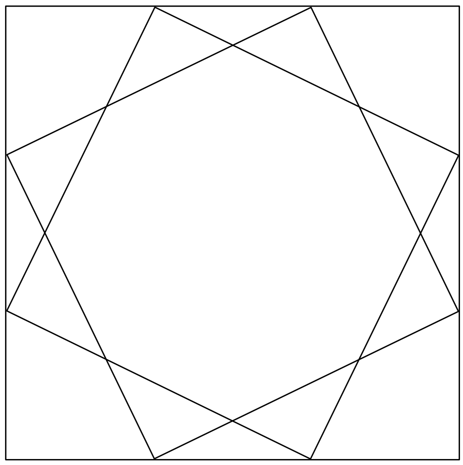
和算にまなぶ（７）

中川　宏

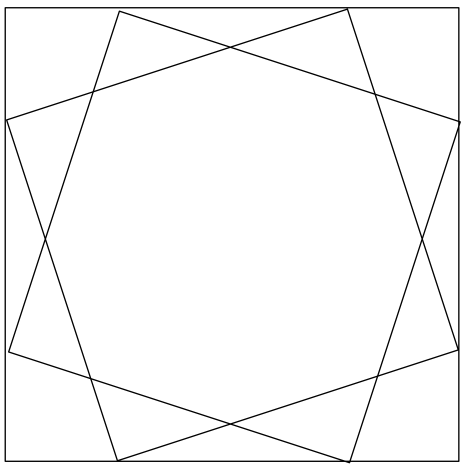
平行四辺形の各辺の３等分点を図のように結ぶと、EO : ON : NB＝４：５：３となることからも、３：４：５のピタゴラスの三角形が作図できるはずだというヒントを佐藤郁郎先生からいただいた。



たしかに、CO : OP : PF＝４：５：３
CN : NM : ML＝３：５：４であるから、元の平行四辺形を正方形にすれば三角形 CON 等は３：４：５の三角形となりそうである。

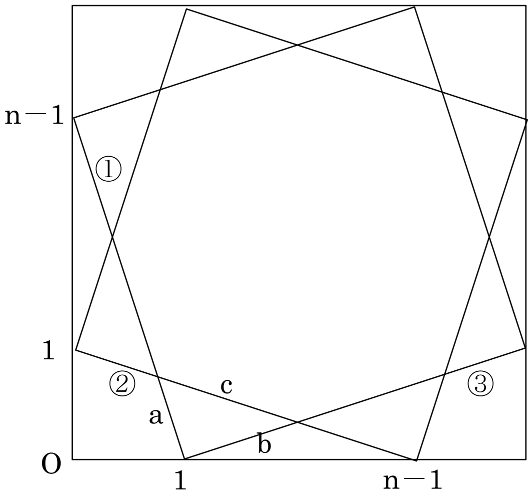


では、正方形の各辺の４等分点を結ぶとどうだろうか？



向きは違うが、
これもどうやら３：４：５の三角形のようだ。

そこで、正方形の各辺をｎ等分する場合として一般化してみた。



図のように座標を取ると、

直線①は、y＝－(n－1)x＋n－1

直線②は、y＝$-\dfrac{1}{n-1}$ x＋1

直線③は、y＝$\dfrac{1}{n-1}$ x－$\dfrac{1}{n-1}$

と表すことができる。

連立方程式を解いて、

直線①と②の交点は、x＝y＝$\dfrac{n-1}{n}$

直線②と③の交点は、x＝$\dfrac{n}{2}$,y＝$\dfrac{n-2}{2(n-1)}$

$$a^2 = \left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{n^2-2n+2}{n^2}$$

$$b^2 = \left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\left(\frac{n-2}{2(n-1)}\right)^2 = \frac{(n-2)^2(n^2-2n+2)}{4(n-1)^2}$$

$$c^2 = \left(\frac{n}{2}-\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(-\frac{n-2}{2(n-1)}+\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{(n^2-2n+2)^3}{4n^2(n-1)^2}$$

ここから、

$\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{4(n-1)^2}{n^2(n-2)^2}$　よって、$\dfrac{a}{b}=\dfrac{2(n-1)}{n(n-2)}$

$\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{(n^2-2n+2)^2}{4(n-1)^2}$　よって、$\dfrac{c}{a}=\dfrac{n^2-2n+2}{2(n-1)}$

となり、n>2 のときには、a : b : c は整数比となることがわかる。

n	a	b	c	n	a	b	c	n	a	b	c
3	4	3	5	13	24	143	145	23	44	483	485
4	3	4	5	14	13	84	85	24	23	264	265
5	8	15	17	15	28	195	197	25	48	575	577
6	5	12	13	16	15	112	113	26	25	312	313
7	12	35	37	17	32	255	257	27	52	675	677
8	7	24	25	18	17	144	145	28	27	364	365
9	16	63	65	19	36	323	325	29	56	783	785
10	9	40	41	20	19	180	181	30	29	420	421
11	20	99	101	21	40	399	401	31	60	899	901
12	11	60	61	22	21	220	221	32	31	480	481