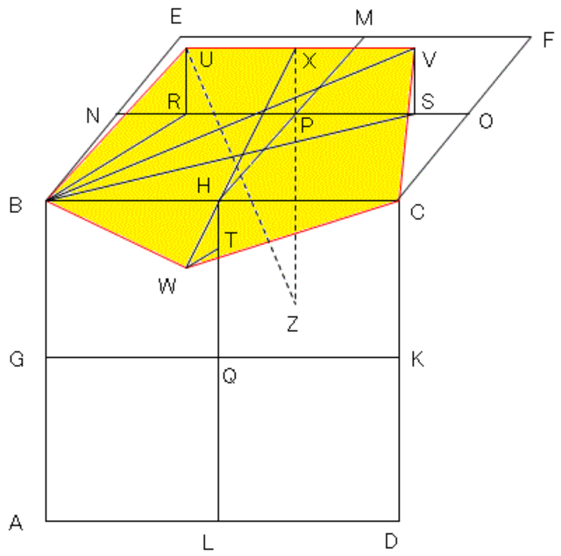
ユークリッド「原論」における正１２面体の正五角形平面の証明

中川　宏



立方体のたがいに直交する２平面を ABCD と CBEF としよう。

辺 AB,BC,CD,DA,EF,EB,FC を各々点 G,H,K,L,M,N,O で二等分し、GK,HL,MH,NO を結ぶ。そして線分 NP,PO,HQ をそれぞれ点 R,S,T で黄金比に分割する。そのさい RP,PS,TQ のほうが大きくなるようにする。

[注]NR：RP＝１：τ(約 1.618)など

点 R,S,T からそれぞれ立方体の外側に垂直に線分を伸ばし RU,SV,TW とする。それらの長さは RP,PS,TQ と等しくなるようにする。そして UB,BW,WC,CV,VU を結ぶ。

このとき五角形 UBWCV は(1)等辺 (2)同一平面 (3)等角であることを示そう。

（中略）

つぎに、この五角形が同一平面上にあることをそう。

点 P から線分 RU,SV に平行な線分 PX を立方体の外側にとり、XH と HW を結ぶ。

このとき XHW が折れ曲がっていないことを示す。

線分 HQ が点 T で黄金比に分割され、QT のほうが大きいのであるから、

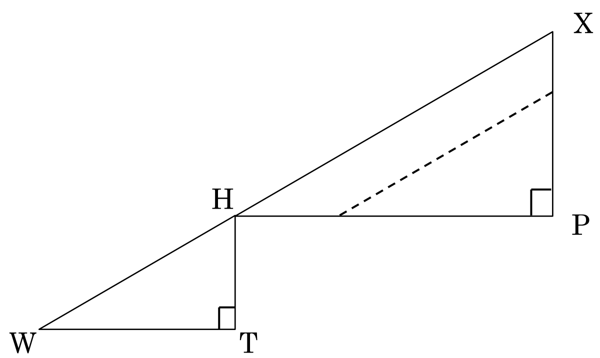
HQ：QT＝QT：TH

ところが、HQ＝HP、かつ QT＝TW＝PX

よって、HP：PX＝WT：TH

そして、HP と TW はともに平面 BD に垂直であるから、たがいに平行。

また、TH と PX もともに平面 BF に垂直であるから、たがいに平行である。

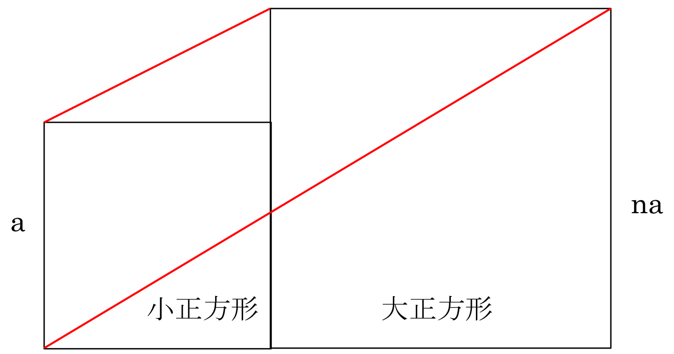


二辺夾角の等しい三角形 XPH と三角形 HTW を重ねてみると、もう一つの辺どうしも平行となるから、これらは一本の直線状にある。よって、XH と HW は同一直線上にある。

こうしてすべての辺が同一平面上にある五角形 UBWCV は同一平面上にあるといえる。

じつに美しい証明に感動する。

この証明の核心部分は次のような和算ふうの図に書き直すことができる。



ユークリッドの証明をいいかえると、大きさの異なる正方形が上のように接しているときに、２つの頂点を結ぶ２本の赤い線分が平行であるなら、ｎの値はいくつかということになる。
赤い線分を斜辺とする２つの直角三角形が相似であるから、

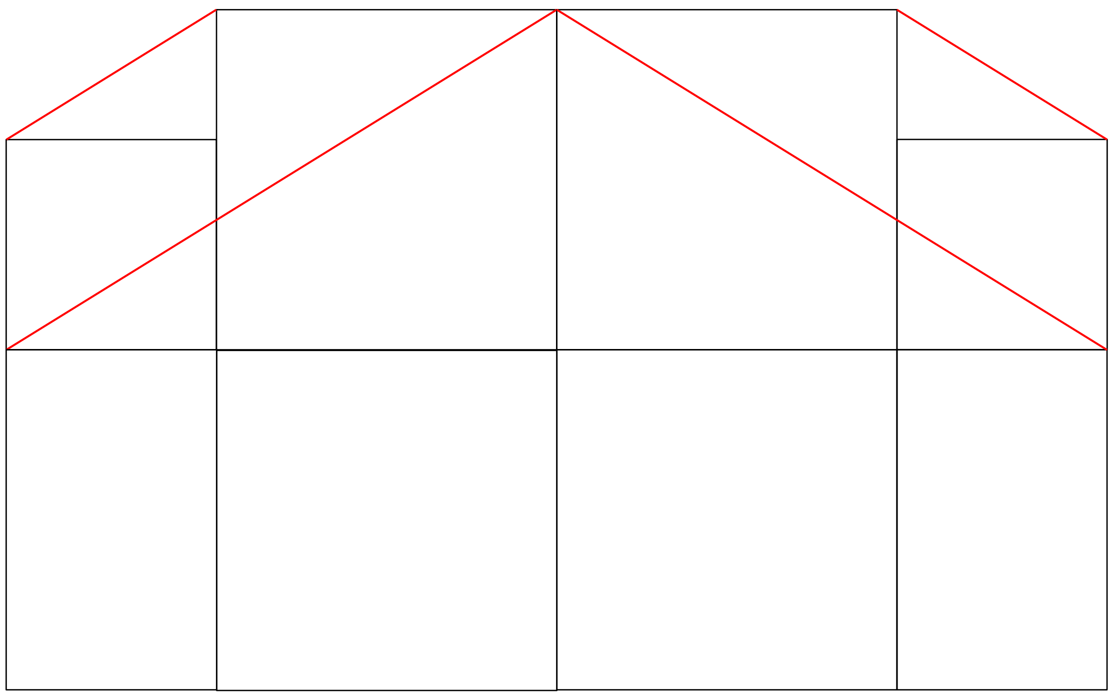
$a : na - a = na + a : na$　つまり、

$na^2 = n^2a^2 - a^2$

$n = n^2 - 1$

$n^2 = n + 1$

この関係を満たすｎが黄金比とよばれる無理数である。
つまり、２つの正方形の辺長比が黄金比の場合に限り、２つの赤い斜辺は平行になるというわけである。
このことから、黄金比の建築上の必要性が浮かび上がってくる。



上のような２層式の建物において、大屋根と小屋根の傾斜を一致させ美的にするためには黄金比の算出が必要になるわけである。