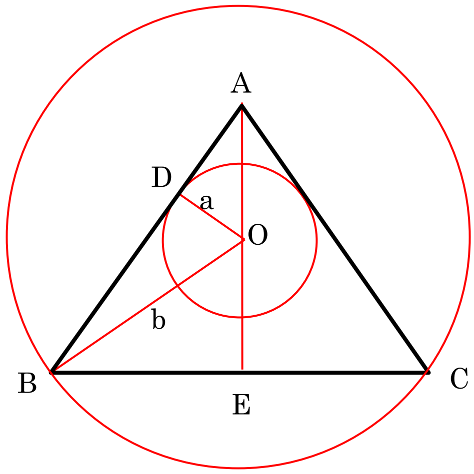
正多面体の外接球と内接球

中川　宏

正多面体の丸さについて、内接球半径 a と外接球半径 b との比を指標とする考え方がある。

b/a が 1 に近いほど丸いというわけである。



正四面体の一辺 BC＝4 とする。

$AB=2\sqrt{3}$

$AE=2\sqrt{2}$

AD=1/3AB

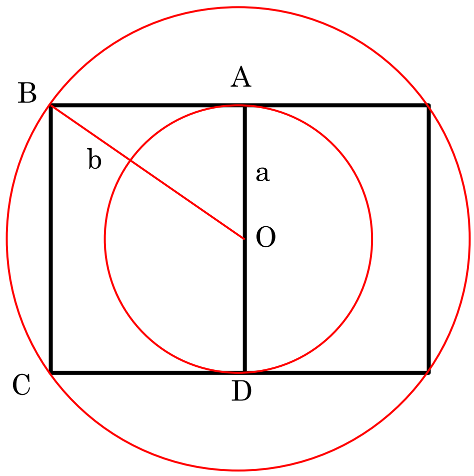
OA=OE より、

$a^2=(\sqrt{2})^2-(2/3\sqrt{3})^2=2/3$

$b^2=2^2+(\sqrt{2})^2=6$

よって

b/a＝3



立方体の一辺 BC=2 とする。

OA=1

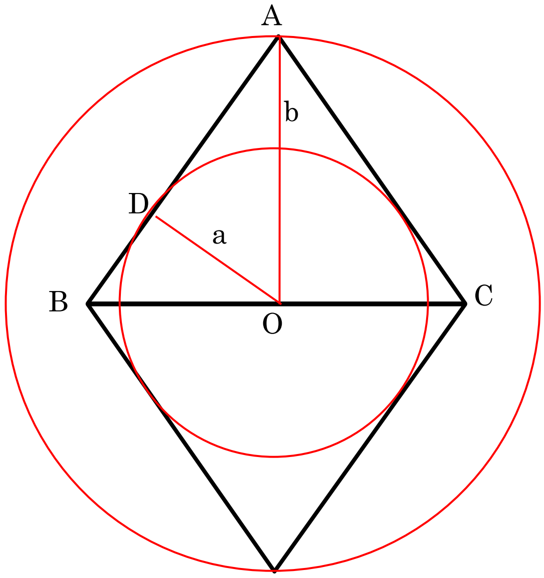
$AB=\sqrt{2}$

よって、

$OB=\sqrt{3}$

したがって

$b/a=\sqrt{3}$



正八面体の一辺 BC=2 とする。

$OA=b=\sqrt{2}$

$AB=\sqrt{3}$

$DB=1/3AB=(\sqrt{3})/3$

$a^2=1^2-(\sqrt{3}/3)^2=2/3$

よって

$b/a=\sqrt{3}$

正１２面体の一辺 BC=2/τ とする。

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

BE=1/τ ＝τ－１

OE=AF=τ

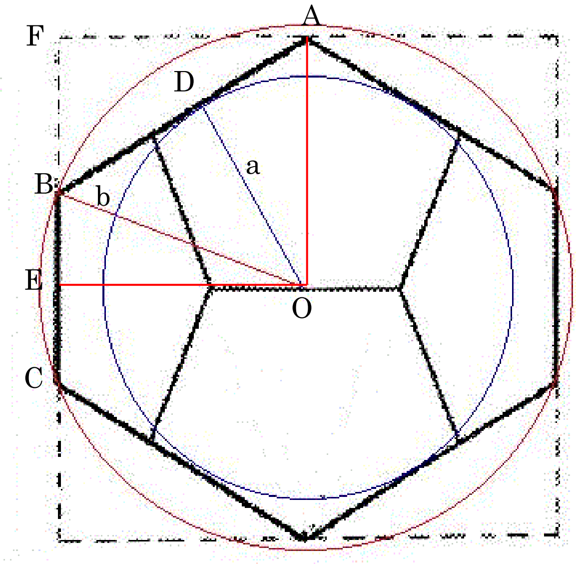
FB=1

$b^2=\tau^2+(\tau-1)^2=1+\tau+1+\tau+1-2\tau=3$

a：AO=AF：AB より

$a^2=\tau^4/(\tau^2+1)$

$b^2/a^2=(3\tau+6)/(3\tau+2)$



$$b/a=\sqrt{\frac{3\tau+6}{3\tau+2}} \sim 1.2584$$

正２０面体の一辺 BC=2 とする。

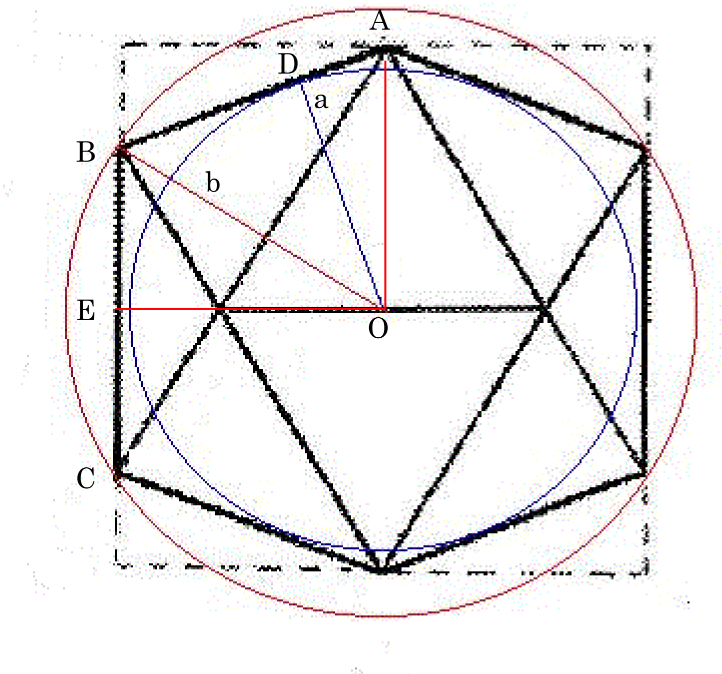
OE=OA=τ

AB=$\sqrt{3}$

AD=$\sqrt{3}/3$

$a^2=\tau^2-1/3$

$b^2=1+\tau^2$



$$b/a=\sqrt{\frac{3\tau+6}{3\tau+2}} \sim 1.2584$$

以上の結果から、もっとも b/a が１に近いのは正１２面体と正２０面体、つぎに立方体と正八面体となった。それらはどちらも、双対の関係にある立体であるから、球に対する指標 b/a が全く同じ値をとるというのは納得しやすいことだと思う。

ところで、この b/a について、次のような表し方があるという。

正 4 面体　: $\sqrt{3}$ ・tan(π/3)＝３

正 6 面体　: $\sqrt{3}$ ・tan(π/4)＝≒１．７３

正 8 面体　: $\sqrt{3}$ ・tan(π/4)＝≒１．７３

正 12 面体　: $\sqrt{3}$ ・tan(π/5)＝$\sqrt{(15-6\sqrt{5})}$≒１．２６

正 20 面体　: $\sqrt{3}$ ・tan(π/5)＝$\sqrt{(15-6\sqrt{5})}$≒１．２６

（http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/polygon.htm　より引用）

正４面体が３回対称軸、立方体と正八面体が４回対称軸、正１２面体と正２０面体が５回対称軸を持つという特徴とぴったり符合するきれいな表記だとおもう。
どのようにしたら上記のように表せるのだろうか？