和算にまなぶ（３）

「日本の数学—何題解けますか？[下]」（深川英俊・ダン・ソコロフスキー著）７６頁より

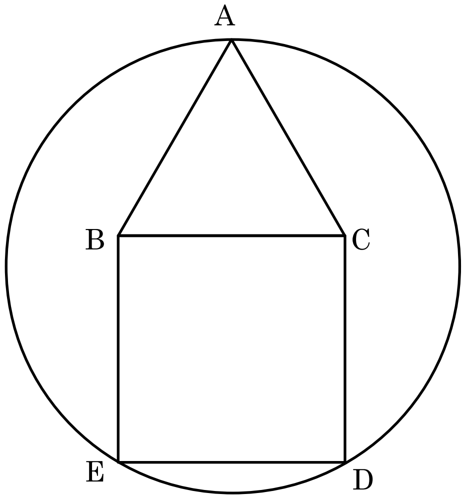
中川　宏

問題 9.10.1（「算法起源集」、佐久間纉、１８７７年）

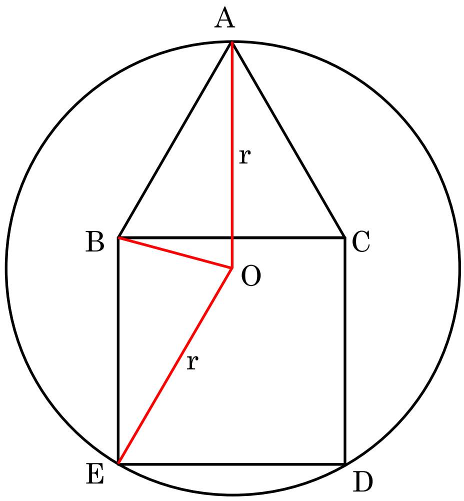
正三角形ＡＢＣの底辺ＢＣを一辺とする正方形ＣＢＥＤがある。

これに外接する円Ｏ（r）を描く。

このとき、r＝AB　を示せ。



解答（中川）



△ABO と△EBO において、

OA=OE=r

AB=EB

から三辺相同で、

△ABO≡△EBO

よって、

∠BOA=∠BOE

他方、EB∥OA より、

∠BOA=∠EBO

よって、

∠BOE=∠EBO

つまり△EBO は二等辺三角形なので、

EB=OE=r

ゆえに

AB=EB=r

感想（中川）

一辺がおなじ正三角形と正方形と、同じ半径をもつ円が接するとはなんともシンプルで美しい。

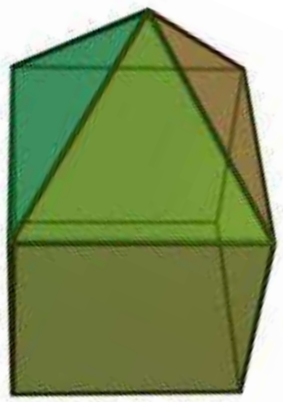
発展問題（中川）

立方体の上に、底面が立方体の天面と共有する正方形、側面が正三角形の正四角錐が載っている。

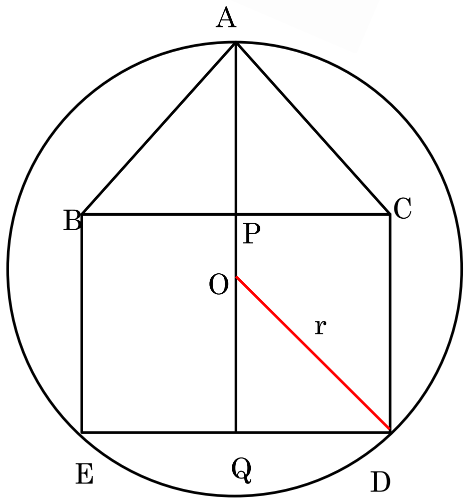
この立体はジョンソン立体８番（正四角錐柱）ともよばれる。

この立体に外接する球の半径が立方体の一辺に等しい

ことを示せ。



解答（中川）



便宜上 AB=BE=2 と置く。

△OQD において、

$QD=\sqrt{2}$ したがって

$OQ^2+2=r^2$

また、△APC において、

$PC=\sqrt{2}$、AC=2 であるから、

$AP=\sqrt{2}$

他方

PQ=2 であるから、

$OA^2=r^2=(\sqrt{2}+2-OQ)^2$

よって、

$OQ^2+2=(\sqrt{2}+2-OQ)^2$

$OQ^2+2=2+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}OQ+4-4OQ+OQ^2$

$OQ=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

よって

$r=2=BE$

こうして、佐久間纘の○△□に関する美しい関係が、三次元でも成り立つことが証明された。