第三章 練習問題2 (10)

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-2sx+s^2)(1-2ts+t^2)}}\,dx$$

(1)

$a=\dfrac{1+s^2}{2s}$, $b=\dfrac{1+t^2}{2t}$ とおく。

$$I=\frac{1}{2\sqrt{st}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}\,dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}\,dx=-2\,\mathrm{Log}\left[\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right]$$ （公式） をつかう

In[1]:= $\mathbf{f1[x\_,\ a\_,\ b\_] := -2\,Log\left[\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right]}$

In[2]:= $\mathbf{f1\left[1,\ \frac{1+s^2}{2s},\ \frac{1+t^2}{2t}\right]}$

Out[2]= $-2\,\mathrm{Log}\left[\sqrt{-1+\frac{1+s^2}{2s}}+\sqrt{-1+\frac{1+t^2}{2t}}\right]$

In[3]:= $\mathbf{f1\left[-1,\ \frac{1+s^2}{2s},\ \frac{1+t^2}{2t}\right]}$

Out[3]= $-2\,\mathrm{Log}\left[\sqrt{1+\frac{1+s^2}{2s}}+\sqrt{1+\frac{1+t^2}{2t}}\right]$

In[4]:= $\mathbf{i1[s\_,\ t\_] :=}$

$$\frac{1}{2\sqrt{st}}\left(-2\,\mathrm{Log}\left[\sqrt{-1+\frac{1+s^2}{2s}}+\sqrt{-1+\frac{1+t^2}{2t}}\right]+2\,\mathrm{Log}\left[\sqrt{1+\frac{1+s^2}{2s}}+\sqrt{1+\frac{1+t^2}{2t}}\right]\right)$$

In[5]:= **i1[2, 3] // N**

Out[5]= 0.353957

In[6]:= **i1[5, 4] // N**

Out[6]= 0.101719

(2)

In[7]:= x =.; a =.; b =.; g1 =.;

$$g1[a\_, b\_] = \text{Integrate}\left[\frac{1}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}, \{x, -1, 1\}, \text{Assumptions} \to a > 1 \&\& b > 1\right]$$

Out[7]=
$$\text{Log}\left[\frac{2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}}{-2+a+2\sqrt{(-1+a)(-1+b)}+b}\right]$$

In[8]:= i2 =.;

In[9]:=
$$i2[s\_, t\_] := \frac{1}{2\sqrt{s\,t}}\, g1\left[\frac{1+s^2}{2\,s}, \frac{1+t^2}{2\,t}\right]$$

In[10]:= i2[s, t]

Out[10]=
$$\frac{\text{Log}\left[\frac{2+\frac{1+s^2}{2s}+\frac{1+t^2}{2t}+2\sqrt{\left(1+\frac{1+s^2}{2s}\right)\left(1+\frac{1+t^2}{2t}\right)}}{-2+\frac{1+s^2}{2s}+\frac{1+t^2}{2t}+2\sqrt{\left(-1+\frac{1+s^2}{2s}\right)\left(-1+\frac{1+t^2}{2t}\right)}}\right]}{2\sqrt{s\,t}}$$

In[11]:= i2[2, 3] // N

Out[11]= 0.353957

In[12]:= i2[5, 4] // N

Out[12]= 0.101719

(3) Legendreの多項式を用いる

以下の級数を計算すると、被積分関数が得られる。
級数の計算はMathematicaが行ってくれる。

In[13]:=
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\, \text{LegendreP}[n, x]\right)$$

Out[13]=
$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2\,t\,x}}$$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\, \text{LegendreP}[n, x]\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n\, \text{LegendreP}[n, s]\right)$ を展開し、項別積分する。

$\int_{-1}^{1} \text{LegendreP}[n, x]\, \text{LegendreP}[n, x]\, dx = 2/(2\,n+1)$ に着目すると,
積分結果は以下の通り。積分結果 （無限級数） はMathematicaが、ArcTanhとSqrt[]を使った形に直してくれる。

In[14]:= $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} (s\,t)$^n

Out[14]= $\frac{2 \,\mathrm{ArcTanh}\left[\sqrt{s}\,\sqrt{t}\right]}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}}$

In[15]:= $\frac{2 \,\mathrm{ArcTanh}\left[\sqrt{s}\,\sqrt{t}\right]}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}}$ // TrigToExp

Out[15]= $-\frac{\mathrm{Log}\left[1-\sqrt{s}\,\sqrt{t}\right]}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}} + \frac{\mathrm{Log}\left[1+\sqrt{s}\,\sqrt{t}\right]}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}}$

検算

In[16]:= $-\frac{\mathrm{Log}\left[1-\sqrt{s}\,\sqrt{t}\right]}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}} + \frac{\mathrm{Log}\left[1+\sqrt{s}\,\sqrt{t}\right]}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}}$ /. {s → 2, t → 3} // N

Out[16]= 0.353957 − 1.28255 ⅈ

s,tが、|s|<1,|t|<1で無くても使える様に変形

In[17]:= i3a[s_, t_] := $\frac{1}{\sqrt{s\,t}} \mathrm{Log}\left[\mathrm{Abs}\left[\frac{1+\sqrt{s\,t}}{1-\sqrt{s\,t}}\right]\right]$

In[18]:= i3a[2, 3] // N

Out[18]= 0.353957

無限級数を扱う段階では、|t|,|s|<1という制約があったが、最終的な結果は、そのような制限がつかない。